

Εκπαίδευση Επιμορφωτών Β' επιπέδου Τ.Π.Ε.

Συστάδα: Μαθηματικών (ΠΕ03)

ΕΠΙΜΟΡΦΩΤΙΚΟ ΥΛΙΚΟ - ΕΙΔΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

Σκάλες

Σενάριο για την Άλγεβρα

Έκδοση 1η

Νοέμβριος 2018

Πράξη:	ΕΠΙΜΟΡΦΩΣΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ ΓΙΑ ΤΗΝ ΑΞΙΟΠΟΙΗΣΗ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΩΝ ΨΗΦΙΑΚΩΝ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΩΝ ΣΤΗ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΠΡΑΞΗ (ΕΠΙΜΟΡΦΩΣΗ Β' ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΤΠΕ)
Φορείς Υλοποίησης:	Δικαιούχος φορέας:  ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ & ΕΚΔΟΣΕΩΝ Συμπράττων φορέας:  ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΕΡΕΥΝΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ



Επιχειρησιακό Πρόγραμμα
Ανάπτυξη Ανθρώπινου Δυναμικού,
Εκπαίδευση και Διά Βίου Μάθηση
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



11 Παράρτημα 1 – Ενδεικτικά σενάρια επιμορφωτών Β' επιπέδου

Σενάριο 1: Σκάλες

Συγγραφέας:

Ειρήνη Περυσινάκη, Επιμορφώτρια Μαθηματικών (Β' επιπέδου).

Γνωστική περιοχή:

Άλγεβρα (τριγωνομετρία).

Εισαγωγή στην έννοια της κλίσης ευθείας μέσω της κλίσης σκάλας.

Συμμεταβαλλόμενα μεγέθη.

Ομοιότητα σχημάτων.

Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων.

Θέμα:

Το θέμα του σεναρίου αφορά τη μελέτη της κλίσης μιας ευθείας μέσα από την διερεύνηση της κλίσης μιας σκάλας. Οι μαθητές έχουν τη δυνατότητα να πειραματιστούν με διαφορετικές τιμές του ύψους και του πλάτους των σκαλοπατιών μιας σκάλας και έτσι να διερευνήσουν τα γεωμετρικά στοιχεία που καθορίζουν την κλίση μιας σκάλας και κατ' επέκταση μιας ευθείας. Μέσα σε αυτό το πλαίσιο οι μαθητές έχουν επίσης τη δυνατότητα να κατανοήσουν τη σχέση της κλίσης μιας ευθείας (α) με το λόγο της οριζόντιας απομάκρυνσης και της κατακόρυφης ανύψωσης ενός σημείου της ευθείας σε σχέση με ένα σταθερό προεπιλεγμένο σημείο της και (β) με το μέτρο της οξείας γωνίας που σχηματίζει η ευθεία με τον ορίζοντα.

Τεχνολογικά εργαλεία:

Το σενάριο προτείνεται να υλοποιηθεί με το λογισμικό Χελωνόσφαιρα¹².

11.1.1.1 Σκεπτικό

Βασική ιδέα:

Στο παρόν σενάριο οι μαθητές εργάζονται στη Χελωνόσφαιρα και προσπαθούν να «διορθώσουν» με δυναμικό τρόπο, σκάλες που άλλοτε έχουν λάθος κλίση και προορισμό και άλλοτε μοιάζουν «σπασμένες». Με αυτόν τον τρόπο παρέχονται στους μαθητές ευκαιρίες να νοηματοδοτήσουν μέσα από διαδικασίες διερεύνησης και πειραματισμού την έννοια της κλίσης μιας σκάλας και να αποσαφηνίσουν τα στοιχεία που την καθορίζουν (π.χ. εξαρτάται από τον λόγο ύψους και πλάτους των σκαλοπατιών και όχι από τις απόλυτες διαστάσεις τους ή από το πλήθος τους). Μια σκάλα με πολύ μικρές διαστάσεις σκαλοπατιών τείνει να γίνει ευθεία («τσουλήθρα»), κάτι που γίνεται αντιληπτό μέσα από τη δυνατότητα δυναμικού χειρισμού

¹² Το πρωτότυπο σενάριο είχε αναπτυχθεί με το λογισμικό Χελωνόκοσμος. Η παρούσα μορφή του σεναρίου διαφέρει μόνο στη χρήση της Χελωνόσφαιρας, η οποία αποτελεί εξέλιξη του Χελωνόκοσμου.

μεταβλητών που προσφέρει η Χελωνόσφαιρα. Έτσι, η έννοια της κλίσης μιας σκάλας επεκτείνεται με φυσικό τρόπο στην έννοια της κλίσης ευθείας, αναδεικνύοντας σημαντικά γεωμετρικά στοιχεία της, όπως την αμφιμονοσήμαντη σχέση της κλίσης της ευθείας με το μέτρο της οξείας γωνίας που σχηματίζει με τον ορίζοντα.

Προστιθέμενη αξία:

Η εισαγωγή των μαθητών στην έννοια της κλίσης γίνεται στην αρχή του 2^{ου} κεφαλαίου της γεωμετρίας της Β' γυμνασίου μέσα από την έννοια της εφαπτομένης οξείας γωνίας. Παρότι το αρχικό παράδειγμα που χρησιμοποιείται στο σχολικό βιβλίο αφορά την κλίση ως ποσοστό που δείχνει πόσο ανηφορικός είναι ένας δρόμος, στη συνέχεια τα υπόλοιπα μέρη του κεφαλαίου και οι αντίστοιχες ασκήσεις αναφέρονται στον υπολογισμό των πλευρών ορθογωνίων τριγώνων με χρήση της εφαπτομένης ως τριγωνομετρικού αριθμού. Έτσι, η διασύνδεση ανάμεσα στην εφαπτομένη ως κλίση και τις παραμέτρους από τις οποίες εξαρτάται θέτει ένα διδακτικό και μαθησιακό ζήτημα για τους μαθητές και το διδάσκοντα.

Η έννοια της κλίσης μιας ευθείας φαίνεται να εξαρτάται από δύο παραμέτρους: την οριζόντια απομάκρυνση και την κατακόρυφη ανύψωση κάποιου σημείου της ευθείας σε σχέση με ένα σταθερό, προεπιλεγμένο σημείο της. Δύσκολα λοιπόν οι μαθητές κατανοούν ότι η κλίση δεν εξαρτάται από τις συγκεκριμένες αριθμητικές τιμές αυτών των μεγεθών, αλλά από το λόγο τους. Ακόμα πιο δύσκολα πείθονται για την ανεξαρτησία αυτού του λόγου από την επιλογή των δύο σημείων.

Το περιβάλλον της Χελωνόσφαιρας, ακριβώς επειδή διαθέτει εργαλεία πειραματισμού, προσφέρει τη δυνατότητα στους μαθητές να κατασκευάσουν αρχικά τους «σωστούς» κανόνες δόμησης μιας σκάλας, στη συνέχεια να τους αμφισβητήσουν – κάτι που γίνεται μέσα από το διάλογο στις ομάδες – και τελικά να διακρίνουν τα απαραίτητα από τα περιττά στοιχεία στην κατασκευή. Μέσα από αυτή τη διαδικασία αναστοχασμού και διαλόγου δημιουργούνται βαθιές πεποιθήσεις για την συγκεκριμένη μαθηματική έννοια. Η καλή κατάκτηση της έννοιας τέλος, αποτυπώνεται στις εικαστικές δημιουργίες των μαθητών.

11.1.1.2 Πλαίσιο εφαρμογής

Σε ποιους απευθύνεται:

Το σενάριο προτείνεται να εφαρμοστεί στη Β' Γυμνασίου.

Χρόνος υλοποίησης:

Για την εφαρμογή του σεναρίου εκτιμάται ότι απαιτούνται 6-8 διδακτικές ώρες.

Χώρος υλοποίησης:

Το σενάριο προτείνεται να υλοποιηθεί στο εργαστήριο των Η/Υ. Η εισαγωγική συζήτηση που εμπλέκει τους μαθητές στο θέμα της κλίσης μιας σκάλας (και λαμβάνει χώρα κατά την 1^η φάση εφαρμογής) μπορεί να διεξαχθεί στην αίθουσα διδασκαλίας.

Προαπαιτούμενες γνώσεις:

Οι μαθητές θα πρέπει να γνωρίζουν βασικές λειτουργίες της Χελωνόσφαιρας, απλές εντολές Logo, γεωμετρία παράλληλων ευθειών, την έννοια του λόγου δύο αριθμών και την έννοια των ανάλογων ποσών.

Απαιτούμενα βοηθητικά υλικά και εργαλεία:

Φύλλα εργασίας, οδηγίες, πρόχειρο σημειωματάριο.

Κοινωνική ενσυχρήσρωση της τάξης:

Οι μαθητές χωρίζονται σε ομάδες των 2 – 3 ατόμων που μοιράζονται κάθε μηχανήμα και εναλλάσσουν περιοδικά τους εξής τρεις ρόλους:

Μαθητής που χειρίζεται το πληκτρολόγιο και το ποντίκι.

Μαθητής που παρακολουθεί την πορεία του φύλλου εργασίας και το έργο του 1ου μαθητή.

Μαθητής που κρατά σημειώσεις με τους προβληματισμούς της ομάδας και την πορεία της, με στόχο τη δημιουργία έκθεσης πεπραγμένων.

Ο καθηγητής ενημερώνει για τις σχετικές δραστηριότητες της κάθε φάσης, συντονίζει το έργο των ομάδων (όπως την αλληλεπίδρασή τους στην 3η φάση) και την ανακεφαλαιωτική συζήτηση στο τέλος, φροντίζει για την απόκτηση κοινής ορολογίας. Ενθαρρύνει τη διερευνητική διαδικασία των ομάδων και σε καμία περίπτωση δεν δίνει έτοιμες απαντήσεις. Για παράδειγμα, προτρέπει τη χρήση των μεταβολών σε μεγάλο εύρος τιμών, ή με μικρό βήμα. Ακόμα μπορεί να θέσει προβληματισμό για τον ρόλο των μεταβλητών στην κατασκευή μιας σκάλας: Οι μεταβλητές μιας σκάλας είναι το ύψος, το πλάτος και το πλήθος των σκαλοπατιών. Όταν όμως θεωρήσουμε την κλίση της σκάλας σαν μια από τις μεταβλητές, τότε ποια η ποιες από τις προηγούμενες θα μπορούσαν να αντικατασταθούν; Γιατί π.χ. είναι σωστό ότι μια σκάλα εξαρτάται από τις μεταβλητές, πλάτος, πλήθος σκαλοπατιών και κλίση;

Στόχοι:

Από πλευράς γνωστικού αντικειμένου οι κύριοι διδακτικοί στόχοι του σεναρίου σχετίζονται με την διερεύνηση της έννοιας της κλίσης μιας ευθείας από τους μαθητές κατά την εμπλοκή τους σε διαδικασίες διερεύνησης της κλίσης μιας σκάλας με χρήση μεταβλητών για το ύψος και το πλάτος των σκαλοπατιών. Ειδικότερα, επιδιώκεται οι μαθητές:

- Να κατανοήσουν ότι η κλίση μιας σκάλας εξαρτάται από το λόγο του ύψους προς το πλάτος των σκαλοπατιών της και ότι ο λόγος αυτός είναι ίδιος με τον λόγο της κατακόρυφης ανύψωσης προς την οριζόντια απομάκρυνση της σκάλας.
- Να κατανοήσουν ότι η κλίση ευθείας - σκάλας επηρεάζεται από το λόγο της κατακόρυφης ανύψωσης προς την οριζόντια απομάκρυνση ενός σημείου της από κάποιο άλλο σταθερό σημείο της και δεν επηρεάζεται από τα μήκη αυτών των αποστάσεων ούτε από την επιλογή των δύο σημείων
- Να κατανοήσουν ότι η κλίση ευθείας είναι ένας αριθμός καθαρός από μονάδες.
- Να βρίσκουν την κλίση μιας σκάλας αν γνωρίζουν το ύψος και το πλάτος των σκαλοπατιών της.
- Να βρίσκουν το πλάτος των σκαλοπατιών μιας σκάλας αν γνωρίζουν την κλίση της και το ύψος της.
- Να βρίσκουν το ύψος των σκαλοπατιών μιας σκάλας αν γνωρίζουν την κλίση της και το πλάτος τους.

- Να κατανοήσουν ότι η κλίση ευθείας – σκάλας συνδέεται αμφιμονοσήμαντα με την οξεία γωνία που σχηματίζει με τον ορίζοντα.
- Να συνδέουν την κλίση 100% με ευθεία – σκάλα που σχηματίζει γωνία 45° με τον ορίζοντα.
- Να συγκρίνουν τις κλίσεις δύο ευθειών με το μέγεθος των γωνιών τους: Μεγαλύτερη κλίση σημαίνει και μεγαλύτερη οξεία γωνία με τον ορίζοντα.
- Να κατανοήσουν ότι η κλίση μιας ευθείας – σκάλας μπορεί να είναι απεριόριστα μεγάλη ή και απεριόριστα μικρή, μέχρι και 0.

Ανάλυση του σεναρίου

Ροή εφαρμογής των δραστηριοτήτων:

Η εφαρμογή των δραστηριοτήτων μπορεί να διαχωριστεί σε τέσσερις φάσεις:

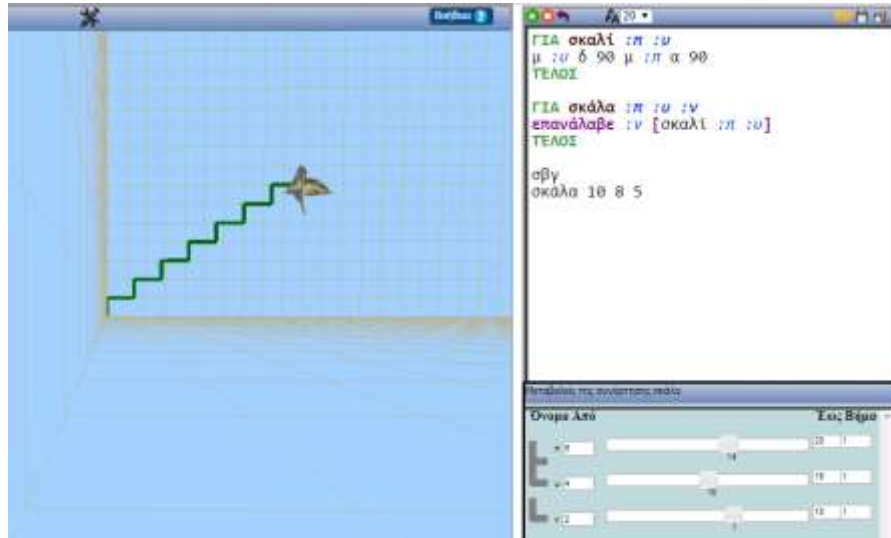
1η Φάση: Η 1^η φάση αφορά την εμπλοκή των μαθητών με

- την έννοια της κλίσης σε κεκλιμένες επιφάνειες και
- την κατασκευή μιας σκάλας στη Χελωνόσφαιρα με μεταβλητό πλήθος σκαλοπατιών μέσα από την επανάληψη μιας δοσμένης διαδικασίας που κατασκευάζει ένα σκαλοπάτι με χρήση μεταβλητών για το πλάτος και το ύψος του.
- την δυναμική αλλαγή των γεωμετρικών μεγεθών που καθορίζουν τη μορφή της σκάλας μέσα από την αλλαγή των τιμών των αντίστοιχων μεταβλητών.

Αρχικά μπορεί να συζητηθεί με τους μαθητές το θέμα της ισορροπίας και της άνεσης στην κίνηση στις διάφορες οριζόντιες ή κεκλιμένες επιφάνειες (π.χ. γιατί μια πλαγιά ενός βουνού είναι δύσκολη ή επικίνδυνη στην αναρρίχησης της ή γιατί μια τσουλήθρα θα μπορούσε να είναι επικίνδυνη αν η κλίση της ήταν εξαιρετικά μεγάλη).

Μπορεί επίσης να πραγματοποιηθεί και το εξής απλό πείραμα της «ισορροπίας κύβου σε κεκλιμένο επίπεδο»: Τοποθετούμε έναν κύβο σε μια όχι λεία σανίδα που αρχικά είναι οριζόντια και που σταδιακά την ανυψώνουμε. Παρατηρούμε ότι όταν η σανίδα έχει στραφεί κατά γωνία περίπου 45° (κλίση 100%) ο κύβος ανατρέπεται, κάτι που μπορεί να ερμηνευθεί και από τη θέση του κέντρου βάρους του κύβου.

Στη συνέχεια ο εκπαιδευτικός παρακινεί τους μαθητές να διατυπώσουν ανάλογες σκέψεις για τις σκάλες και την κλίση τους, για το λόγο χρήσης τους (π.χ. ερωτώντας γιατί στη Σαντορίνη τα σοκάκια είναι γεμάτα σκαλοπάτια και δεν προτιμήθηκαν λείοι δρόμοι προσβάσιμοι σε οχήματα) κ.τ.λ.



Εικόνα 61: Η κατασκευή μιας σκάλας με τρεις μεταβλητές.

Τέλος, οι μαθητές καλούνται να σχεδιάσουν στη Χελωνόσφαιρα μια απλή σκάλα που επαναλαμβάνει τη διαδικασία `σκαλί`. Στόχος εδώ είναι να αναγνωρίσουν οι μαθητές την επαναληπτική διαδικασία σκαλοπατιών στη σύνθεση μιας σκάλας και να αποκτηθεί μια κοινή γλώσσα για τα επόμενες φάσεις της διερεύνησης.

Σε αυτή το σημείο οι μαθητές παρακινούνται να παρατηρήσουν με ποιο τρόπο η αλλαγή κάθε παραμέτρου επηρεάζει τη μορφή της σκάλας. Μεταβάλλοντας στο μεταβολέα τις μεταβλητές πλάτος (π) και ύψος (υ) των σκαλοπατιών ανεξάρτητα (εικόνα 61), η κλίση αλλάζει, όχι όμως όταν μεταβάλλεται το πλήθος τους (ν). Σε αυτή τη φάση δεν αναμένεται να είναι σε θέση οι μαθητές να διακρίνουν ότι η κλίση δεν μεταβάλλεται όταν το πλάτος και το ύψος των σκαλοπατιών μεταβληθούν διατηρώντας τον ίδιο λόγο.

Ενδεικτικό φύλλο εργασίας (1^η Φάση)

α) Αντιγράψτε στο περιβάλλον της Χελωνόσφαιρας τη διαδικασία `σκαλί` που δίνεται ακολούθως και έπειτα εκτελέστε την εντολή `σκαλί 30 50`

```
ΓΙΑ σκαλί :π :υ
```

```
μ :υ δ 90 μ :π α 90
```

```
ΤΕΛΟΣ
```

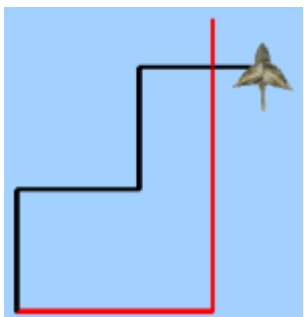
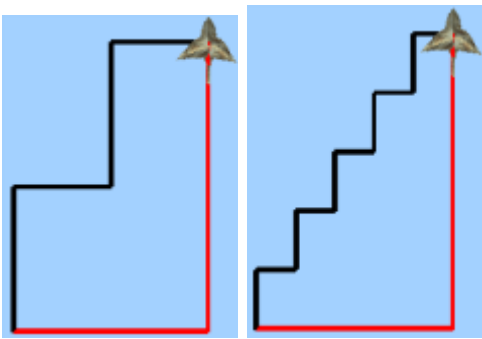
β) Τι σχηματίστηκε; Τι αντιπροσωπεύει η μεταβλητή `:π` και τι η μεταβλητή `:υ`;

γ) Μπορείτε να δημιουργήσετε μια νέα διαδικασία που θα ονομάσετε `σκάλα` και θα δημιουργεί σκάλες με μεταβλητό πλάτος (`:π`), ύψος (`:υ`) και πλήθος (`:ν`) σκαλιών; Όταν είστε έτοιμοι, εργαστείτε με το μεταβολέα και γράψτε λίγες γραμμές για το πότε έχετε την αίσθηση ότι η σκάλα σας είναι ή δεν είναι απότομη (αναφερθείτε στη σχέση των τριών μεγεθών, δηλαδή του πλάτους, ύψους και πλήθους σκαλοπατιών).

2^η Φάση: Η 2^η φάση αφορά την εμπλοκή των μαθητών με τη διασύνδεση του σταθερού λόγου ύψους/πλάτους των σκαλοπατιών με την σταθερή κλίση μιας σκάλας που ορίζεται από το λόγο της κατακόρυφης ανύψωσης (ψ) προς την οριζόντια απομάκρυνση (χ).

Στην πρώτη δραστηριότητα της φάσης αυτής οι μαθητές καλούνται να βρουν τον τρόπο να σχεδιάσουν σωστά τα σκαλοπάτια μιας σκάλας, της οποίας οι δύο διαστάσεις της (χ) και (ψ) έχουν σχεδιαστεί με κόκκινες σταθερές γραμμές. Το πρόβλημα, δηλαδή, είναι η άνοδος της οντότητας από ένα συγκεκριμένο σημείο σε ένα άλλο επίσης συγκεκριμένο σημείο, μέσω μιας κλιμακωτής κίνησης.

Πιο συγκεκριμένα οι μαθητές/τριες καλούνται να αντιγράψουν τις διαδικασίες μετατόπιση και αίνιγμαA, που φαίνονται στην εικόνα 62, και να πειραματιστούν με αλλαγές τιμών ώστε να βεβαιωθούν ότι κατανοούν το είδος του σχήματος που δημιουργείται και τις αλλαγές.

ΓΙΑ μετατόπιση :χ :ψ θεσεχρωμαστυλο 4 π :ψ α 90 μ :χ δ 90 θεσεχρωμαστυλο 0 ΤΕΛΟΣ ΓΙΑ αίνιγμαA :π :υ :ν μετατόπιση 80 120 σκάλα :π :υ :ν ΤΕΛΟΣ αίνιγμαA 50 50 2	a)  β)  Εικόνα 62
--	---

Με την εκτέλεση της τελευταίας γραμμής κώδικα (αίνιγμαA 50 50 2) δημιουργείται το πρώτο σχέδιο (εικόνα 62α) ενώ η οντότητα ανέβηκε δύο σκαλοπάτια απέτυχε στο να ανέβει στην κορυφή της σκάλας (και αρχική θέση της οντότητας πριν τη μετατόπιση).

Καλούνται στη συνέχεια καλούνται οι μαθητές να «λύσουν» το αίνιγμα της μετακίνησης για διάφορες τιμές του ν με τη χρήση του δισδιάστατου μεταβολέα (εικόνα 62β). Συγκεκριμένα, στον οριζόντιο άξονα προβάλλεται το πλάτος σκαλοπατιού (π) ενώ στον κατακόρυφο το ύψος

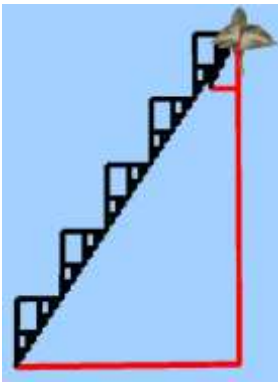
του (υ). Επιλέγοντας τη διακριτή – σημειακή αναπαράσταση, οι μαθητές/τριες μέσα από πειραματισμό μπορούν να διαπιστώσουν ότι όλες οι «λύσεις» του αινίγματος (κόκκινα σημεία) βρίσκονται επάνω σε μια ευθεία. Ο/η εκπαιδευτικός μπορεί ακολούθως να παροτρύνει τους/τις μαθητές/τριες να παρατηρήσουν τη γραμμική αυτή σχέση και να επιχειρήσουν να την ερμηνεύσουν.



Εικόνα 63: Μαντεύοντας τη σταθερότητα του λόγου ύψους/πλάτους σκαλοπατιού για μια σταθερή κλίση σκάλας με τον δισδιάστατο μεταβολέα.

Τέλος, οι μαθητές/τριες προσπαθούν να διορθώσουν τη διαδικασία του αινίγματοςΑ και να την γενικεύσουν στην περίπτωση που η μετατόπιση έχει παραμέτρους χ και ψ. Διαδικασίες που αναμένεται να προκύψουν είναι οι παρακάτω:

ΓΙΑ αίνιγμαΑ_λύση :ν μετατόπιση 80 120 σκάλα 80/:ν 120/:ν :ν ΤΕΛΟΣ	ΓΙΑ σκάλαχψ :χ :ψ :ν μετατόπιση :χ :ψ σκάλα :χ/:ν :ψ/:ν :ν ΤΕΛΟΣ
---	---



Εικόνα 64

Φυσικά, οι μαθητές/τριες καλούνται να ελέγχουν τις εκάστοτε διαδικασίες με τη δυναμική μεταβολή των μεταβολών στη Χελωνόσφαιρα. Ο/η εκπαιδευτικός ενισχύει τους/τις μαθητές/τριες να διατυπώνουν τα συμπεράσματά τους π.χ. το ότι η κλίση μιας σκάλας εξαρτάται κατά πολύ από τις δύο διαστάσεις της (την οριζόντια απομάκρυνση χ και την κατακόρυφη ανύψωση ψ), ενώ είναι ανεξάρτητη από το πλήθος των σκαλοπατιών. Προκειμένου να ενισχύσει την διερεύνηση των μαθητών/τριων και την πορεία εξαγωγής των αντίστοιχων συμπερασμάτων ο/η εκπαιδευτικός μπορεί να καλέσει τους/τις μαθητές/τριες να εκτελέσουν διαδοχικά τις ακόλουθες εντολές που δίνουν το εντυπωσιακό σχέδιο της εικόνας 64 και με βάση αυτό να προβληματιστούν σχετικά με την κλίση των σχηματιζόμενων σκαλών.

σκάλαχψ 80 120 5

σκάλαχψ 80 120 10

σκάλαχψ 80 120 20

σκάλαχψ 80 120 40

Το πώς ακριβώς εμπλέκονται οι διαστάσεις χ και ψ της σκάλας στην κλίση της γίνεται ακόμα πιο ξεκάθαρο με το δεύτερο αίνιγμα που καλούνται ακολουθώντας οι μαθητές/τριες να λύσουν: Το ζητούμενο είναι να προσδιορίσουν με χρήση των μεταβολών τις τιμές των χ και ψ ώστε οι δύο παραγόμενες σκάλες (εικόνα 65) να έχουν την ίδια κλίση (χωρίς αναγκαστικά να ταυτίζονται). Προτείνεται στους/τις μαθητές/τριες να παρατηρούν συγχρόνως τις εκτυπώσεις του λόγου ψ/χ στην έξοδο, στο παράθυρο του ιστορικού. Σε αυτή την περίπτωση κάθε φορά που προσεγγίζουν κάποια λύση, η εκτύπωση αντίστοιχα προσεγγίζει τον αριθμό 1.5.

	ΓΙΑ αίνιγμαB : χ : ψ : ν σκάλαχψ 80 120 40 σκάλαχψ : χ : ψ : ν τύπωση : ψ/χ ΤΕΛΟΣ αίνιγμαB 80 80 10
--	--

Εικόνα 65

3^η Φάση: Στην τρίτη φάση οι μαθητές/τριες εμπλέκονται με τη διερεύνηση της σχέσης που συνδέει τις κλίσεις που έχουν διαφορετικές σκάλες. Για αυτό το λόγο κατασκευάζονται αρχικά

διώροφες σκάλες που περιλαμβάνουν σκάλες ίδιου ύψους και πλήθους σκαλοπατιών αλλά διαφορετικής κλίσης. Το ζητούμενο είναι να βρεθούν οι τιμές του πλάτους των σκαλοπατιών ώστε να κατασκευαστεί μια σκάλα με ενιαία κλίση.

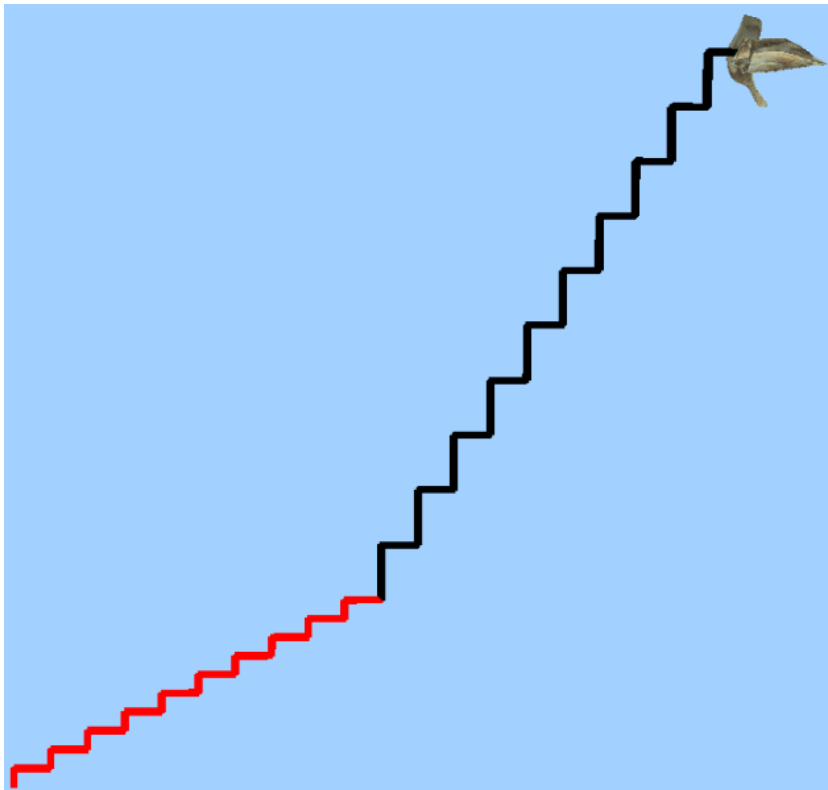
Στη φάση οι ομάδες των μαθητών/τριών αλληλεπιδρούν ανά δύο:

Ζητείται από τη μία ομάδα να δημιουργήσει μια διαδικασία που θα παράγει απλές σκάλες, όπως εκείνες της 1ης φάσης, με τη δέσμευση ότι θα έχουν 10 σκαλοπάτια και θα ανυψώνονται ακριβώς 50 μονάδες. Ομοίως, η δεύτερη ομάδα δημιουργεί μια δεύτερη διαδικασία για να κατασκευάσει σκάλες που έχουν επίσης 10 σκαλοπάτια, αλλά ανυψώνονται 150 μονάδες ακριβώς. Και στις δύο διαδικασίες θα πρέπει οι μαθητές/τριες να αναγνωρίσουν ότι το μοναδικό μεταβλητό μέγεθος είναι το πλάτος (π) των σκαλοπατιών. Έπειτα, καλούνται από κοινού οι δύο ομάδες να δημιουργήσουν μια διαδικασία η οποία δημιουργεί σκάλες που το πρώτο τους τμήμα είναι η σκάλα της πρώτης ομάδας ενώ το δεύτερο τμήμα τους είναι η σκάλα της δεύτερης ομάδας. Διαδικασίες που αναμένεται να προκύψουν είναι οι παρακάτω:

```

ΓΙΑ σκάλα_50 :π
  θέσεχρωμαστιγλο 4
  σκάλα :π 5 10
  θέσεχρωμαστιγλο 0
ΤΕΛΟΣ
ΓΙΑ σκάλα_150 :π
  σκάλα :π 15 10
ΤΕΛΟΣ
ΓΙΑ διώροφη_σκάλα :π
  σπ π 100 σκ
  σκάλα_50 :π
  σκάλα_150 :π
ΤΕΛΟΣ
διώροφη_σκάλα 10

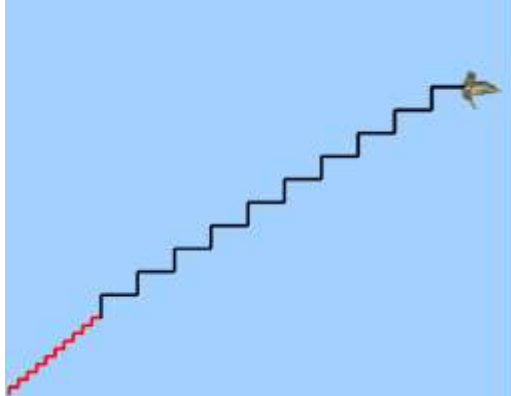
```



Εικόνα 66

Στη συνέχεια της δραστηριότητας οι μαθητές/τριες καλούνται να δοκιμάσουν να 'διορθώσουν' την παραπάνω διαδικασία ώστε να «κολλάνε» σωστά οι δύο σκάλες. Ο/η εκπαιδευτικός μπορεί να παροτρύνει τους/τις μαθητές/τριες να μετακινήσουν το μεταβολέα π ώστε να διαπιστώσουν ότι αλλαγή στο πλάτος των σκαλοπατιών δεν λύνει το πρόβλημα. Ερωτήματα που μπορεί να διατυπωθούν από τους/τις μαθητές/τριες: Μήπως η συγκεκριμένη δυσκολία οφείλεται στο ότι η δεύτερη σκάλα έχει ψηλότερα σκαλοπάτια; Μήπως θα έπρεπε αυτά να είναι περισσότερα και πιο χαμηλά; Θα μπορούσε μια τέτοια κατασκευή να υπάρξει πραγματικά;

Σ' αυτό το σημείο προτείνεται να δοθεί στους/τις μαθητές/τριες η διερεύνηση του αινίγματος Γ :

<pre> ΓΙΑ αίνιγμαΓ :π1 :π2 σπ π 100 α 90 μ 100 δ 90 σκ σκάλα_50 :π1 σκάλα_150 :π2 ΤΕΛΟΣ αίνιγμαΓ 10 10 </pre>		<pre> ΓΙΑ διώροφη_σκάλα :κ σπ π 100 σκ σκάλα_50β :κ σκάλα_150β :κ ΤΕΛΟΣ διώροφη_σκάλα 30 ΓΙΑ αίνιγμαΓ :π1 :π2 σπ π 100 α 90 μ 100 δ 90 σκ σκάλα_50β :π1 σκάλα_150β :π2 ΤΕΛΟΣ αίνιγμαΓ 10 10 </pre>
--	--	---

Εικόνα 67

Η διαφορά της διαδικασίας αίνιγμαΓ από τη διαδικασία διώροφη_σκάλα είναι ότι στην πρώτη χρησιμοποιούνται διαφορετικές μεταβλητές για το πλάτος των σκαλοπατιών κάθε σκάλας. Έτσι, οι μαθητές/τριες έχουν τη δυνατότητα να εντοπίσουν ζεύγη αριθμών που «λύνουν» το πρόβλημα. Μάλιστα, με τη βοήθεια του δισδιάστατου μεταβολέα και την επιλογή της διακριτής-σημειακής παράστασης καλούνται να μελετήσουν τη συμμεταβολή των π_1 και π_2 και να ανακαλύψουν ποια σχέση συνδέει τα πλάτη των σκαλοπατιών κάθε σκάλας στις περιπτώσεις που λύνεται το αίνιγμα Γ και να διατυπώσουν κατάλληλα συμπεράσματα. Π.χ. Για να «κολλούν» οι δύο σκάλες θα πρέπει η σκάλα με το τριπλάσιο ύψος να έχει σκαλοπάτια τριπλάσιου πλάτους. Δηλαδή, θα πρέπει οι δύο σκάλες να έχουν ίδια κλίση (κ): το ποσοστό ανύψωσης σε σχέση με την απομάκρυνση θα πρέπει να είναι το ίδιο.

Αυτό το σημείο είναι κρίσιμο να αναδειχθεί μέσα από μια σύντομη ανοιχτή συζήτηση των ομάδων που θα συντονίσει ο εκπαιδευτικός. Θα πρέπει λοιπόν να συμφωνήσουν οι ομάδες ποιον αριθμό θα ονομάζουν κλίση σκάλας – ευθείας. Να παρατηρήσουν ότι είναι αριθμός ανεξάρτητος από μονάδες και ότι είναι ένα σημαντικό στοιχείο για τη δημιουργία διώροφων σκαλών.

4^η Φάση: Η τέταρτη φάση αφορά την χρήση της κλίσης μιας σκάλας για την κατασκευή διώροφων σκαλών που προκύπτουν από τη συνένωση δύο διαφορετικών σκαλών. Δηλαδή, οι μαθητές εμπλέκονται σε διαδικασίες επανασχεδίασης της διώροφης σκάλας με χρήση της κλίσης ως μεταβλητής.

Αν το κοινό χαρακτηριστικό των δύο σκαλών που αποτελούν τη διώροφη σκάλα είναι η κλίση τους (κ), τότε οι διαδικασίες που τις παράγουν και τις ενώνουν χωρίς προβλήματα θα πρέπει να είναι ως ακολούθως:

<pre> ΓΙΑ σκάλα_50β :κ θέσεχρωμαστιυλο 4 σκάλα 5/:κ 5 10 θέσεχρωμαστιυλο 0 ΤΕΛΟΣ </pre>	<pre> ΓΙΑ σκάλα_150β :κ σκάλα 15/:κ 15 10 ΤΕΛΟΣ </pre>	<pre> ΓΙΑ διώροφη_σκάλαB :κ σπ π 100 σκ σκάλα_50β :κ σκάλα_150β :κ ΤΕΛΟΣ διώροφη_σκάλαB 1 </pre>
---	--	---

Εδώ οι μαθητές/τριες καλούνται να «παίξουν» με το μεταβολέα (αφού ρυθμίσουν το βήμα της μεταβλητής κ στο 0.05) για να παρατηρήσουν ότι η κλίση 1 (100%) σημαίνει ίση κατακόρυφη ανύψωση με οριζόντια απομάκρυνση (γωνία 45°). Επίσης, ότι όταν η κλίση ξεπερνά τη μονάδα η σκάλα γίνεται απότομη ενώ όταν είναι μικρότερη της μονάδας η σκάλα είναι πιο ομαλή.

Το επόμενο βήμα είναι να κληθούν οι μαθητές/τριες να αντικαταστήσουν μία από τις παραμέτρους π (πλάτος σκαλιού) ή υ (ύψος σκαλιού) με την κλίση του σκαλιού (κ). Έτσι αναμένεται να ανακύψει έδαφος για πειραματισμό σχετικά με τη δημιουργία σκαλών με ελεγχόμενη κλίση: Ενδεικτικές διαδικασίες:

ΓΙΑ νέα_σκάλα : π : υ : κ

σκάλα : π : π^* : κ : υ

ΤΕΛΟΣ

νέα_σκάλα 10 8 1

Ο πειραματισμός των μαθητών/τριες με τη δυναμική μεταβολή των τριών παραμέτρων στην παραπάνω διαδικασία αναμένεται να προσφέρει υποστήριξη στους μαθητές προκειμένου να ανακαλύψουν ότι:

- Όταν η κλίση είναι περίπου 0 η σκάλα είναι σχεδόν οριζόντια.
- Η κλίση μπορεί να γίνει οσοδήποτε μεγάλη θελήσουμε.
- Όσο μεγαλώνει η κλίση μιας σκάλας τόσο αυτή γίνεται πιο απότομη.
- Σε κάθε γωνία που σχηματίζει η σκάλα με το οριζόντιο επίπεδο αντιστοιχεί μια διαφορετική τιμή για την κλίση της σκάλας και αντίστροφα.
- Η κλίση δεν επηρεάζεται από το πλήθος n των σκαλοπατιών.

Ο/η εκπαιδευτικός μπορεί επίσης να καλέσει τους μαθητές να διερευνήσουν τι θα συμβεί αν η κλίση πάρει αρνητικές τιμές;

Και επειδή οι νέες σκάλες επανασχεδιάστηκαν για να μπορούν να «κολληθούν» επιτυχώς, οι μαθητές/τριες ολοκληρώνουν αυτή τη φάση δημιουργώντας μια διαδικασία που «κολλά» δυο νέες σκάλες (με την ίδια κλίση φυσικά):

ΓΙΑ νέα_διώροφη_σκάλα : π_1 : υ_1 : π_2 : υ_2 : κ

θεσεχρωμαστιλο 4

νέα_σκάλα : π_1 : υ_1 : κ

θέσεχρωμαστιλο 0

νέα_σκάλα : π_2 : υ_2 : κ

ΤΕΛΟΣ

Επέκταση της δραστηριότητας

A. Παίζοντας με τους ρητούς.

Θα μπορούσε να ζητηθεί από τους/τις μαθητές/τριες να εκτελέσουν διαδοχικά τις εξής διαδικασίες:

σκάλα 10 10 10

σκάλα 10 -10 10

σκάλα -10 -10 10

σκάλα -10 10 10

Το σχέδιο που προκύπτει μοιάζει με ένα μπισκότο (εικόνα 68α).

Το ζητούμενο είναι να ερμηνεύσουν την ανοδική – καθοδική κίνηση της οντότητας και να τη συσχετίσουν με τα σημεία του Καρτεσιανού επιπέδου, αλλά και με τις πράξεις ακεραίων. Φυσικά, αφού το «μπροστά -10» σημαίνει «πίσω 10», το πρόσημο '-' δε σημαίνει τίποτε άλλο από το «αλλαγή διεύθυνσης». Έτσι, για παράδειγμα, εκτελώντας την τρίτη εντολή η οντότητα κινείται και προς τα αριστερά και προς τα κάτω.

Β. Μελετώντας τις «παράλληλες» και τις «κάθετες» σκάλες (κυρίως στην Α' Λυκείου για τη συνθήκη παραλληλίας – καθετότητας ευθειών).

Για τις παράλληλες σκάλες ο/η εκπαιδευτικός δίνει στους/τις μαθητές/τριες τη διαδικασία αμυστήριο για να διερευνήσουν τη συνθήκη κατά την οποία οι δύο σχηματιζόμενες σκάλες είναι παράλληλες:

ΓΙΑ αμυστήριο :π1 :ν1 :κ1 :π2 :ν2 :κ2

νέα_σκάλα :π1 :ν1 :κ1

σπ π :π1*:ν1*:κ1 α 90

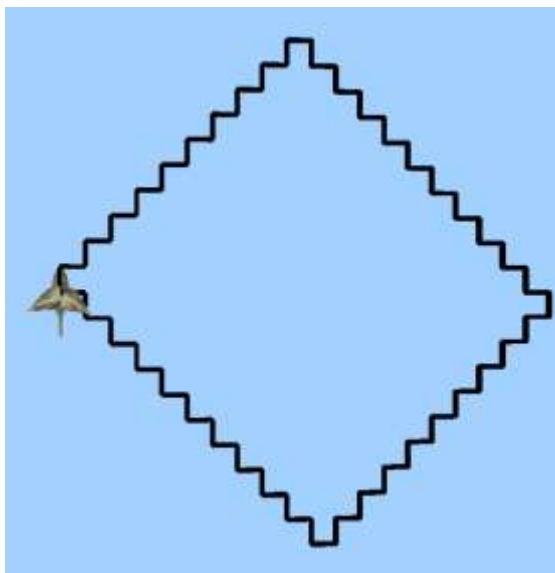
μ :π1*:ν1 π 100 δ 90 σκ

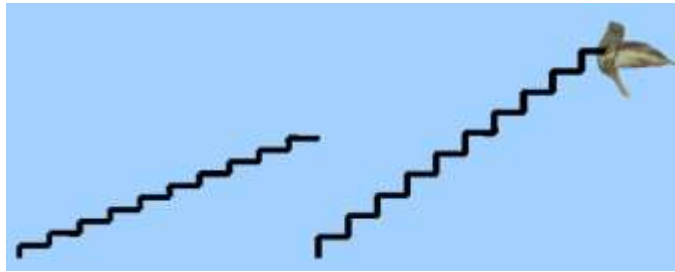
νέα_σκάλα :π2 :ν2 :κ2

ΤΕΛΟΣ

σβγ

αμυστήριο 10 10 0.4 10 10 0.7





Εικόνα 68. α: «Μπισκότο», β:Διερεύνηση της συνθήκης παραλληλίας

Για τις κάθετες σκάλες ομοίως μπορεί να δοθεί στους/τις μαθητές/τριες το βμυστήριο. Επειδή η διερεύνηση είναι πιο δύσκολη εδώ, ο/η εκπαιδευτικός μπορεί να υποδείξει ότι τα :κ1 και :κ2 θα μπορούσαν να πάρουν και αρνητικές τιμές. Μάλιστα διευκολύνεται η διερεύνηση αν τροφοδοτηθεί η διαδικασία βμυστήριο με τις σωστές τιμές των :κ1 και :κ2 όπως φαίνεται στο δεύτερο σχήμα της εικόνας 69.

ΓΙΑ βμυστήριο :π1 :ν1 :κ1 :π2 :ν2 :κ2

νέα_σκάλα :π1 :ν1 :κ1

σπ π :π1*:ν1*:κ1 α 90

μ :π1*:ν1 δ 90 σκ

νέα_σκάλα :π2 :ν2 :κ2

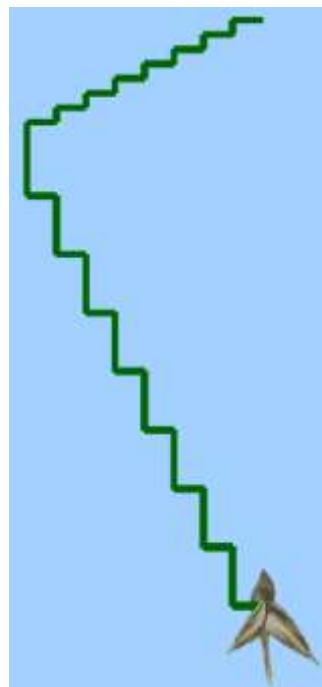
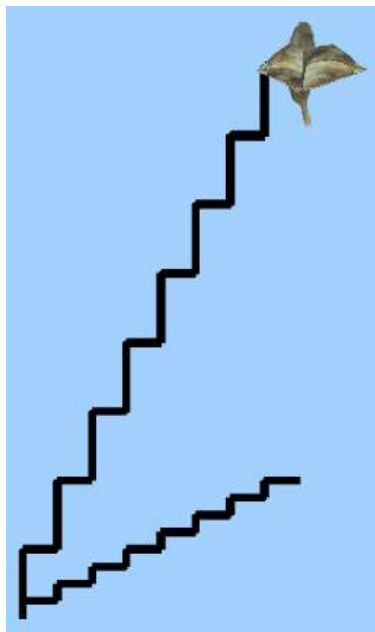
ΤΕΛΟΣ

σβγ

βμυστήριο 8 8 0.5 8 8 2

σβγ

βμυστήριο 8 8 0.5 8 8 -2



Εικόνα 69: Διερεύνηση της συνθήκης καθετότητας.

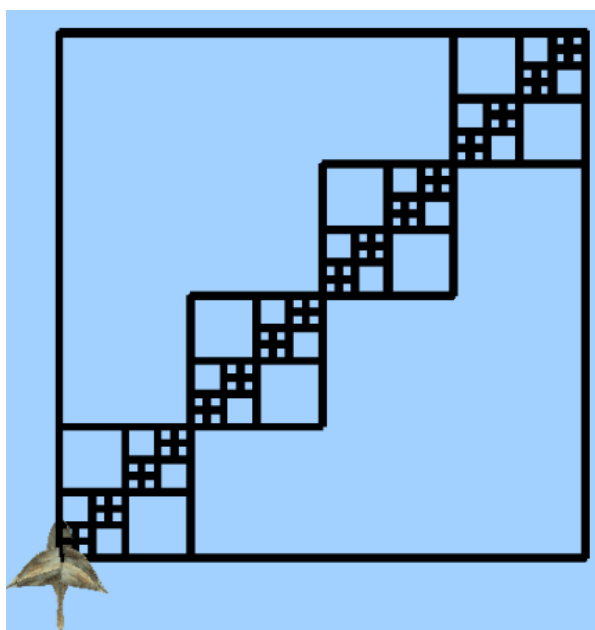
Γ. Εικαστικές δημιουργίες.

Μια άλλη ενδιαφέρουσα επέκταση, που προϋποθέτει την κατανόηση και την εξοικείωση των μαθητών/τριών με τις διαδικασίες που συναντήθηκαν στο παρόν σενάριο μαθήματος, είναι η ελεύθερη καλλιτεχνική έκφραση. Δηλαδή, η δημιουργία σύνθετων σχημάτων με δομικό στοιχείο τις σκάλες. Αν γίνει και χρήση αναδρομικών διαδικασιών, τα αποτελέσματα μπορούν να είναι εντυπωσιακά.

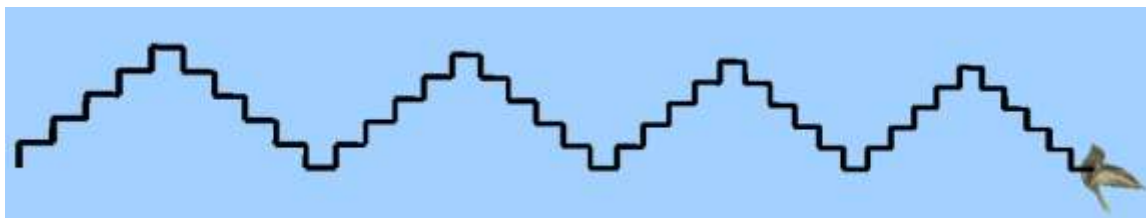
```

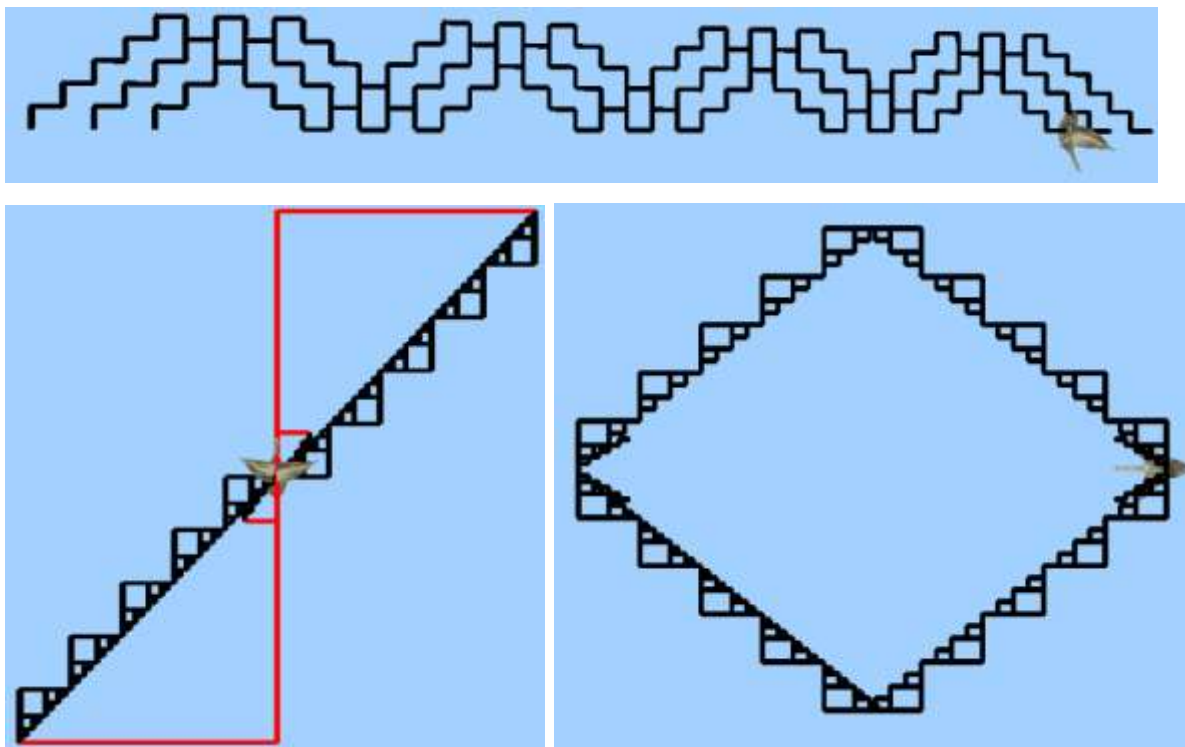
ΓΙΑ τετράγωνο :ν
  αν :ν>8 [σταμάτησε]
  επανάλαβε 2 [
    σκαλα 32/:ν 32/:ν 4*:ν
    π 128 α 90 μ 128 δ 90
    μ 128 δ 90 μ 128 δ 90]
  τετράγωνο 2*:ν
ΤΕΛΟΣ
τετράγωνο 1

```



Άλλα ενδεικτικά σχέδια είναι τα εξής:





Σενάριο 2: Ο ερευνητής και οι χελώνες ΚΑΡΕΤΑ_ΚΑΡΕΤΑ

Συγγραφέας:

Καλλιόπη Αρδαβάνη, Επιμορφώτρια Μαθηματικών (Β' επιπέδου).

Γνωστική περιοχή:

Άλγεβρα

Ανεξάρτητη και εξαρτημένη μεταβλητή.

Πεδίο ορισμού και πεδίο τιμών συνάρτησης.

Μελέτη της γραφικής παράστασης της $y=ax+\beta$.

Αλλαγή κλίμακας της γραφικής παράστασης.

Μετασχηματισμοί της $y=ax$.

Έννοια της αντίστροφης συνάρτησης .

Θέμα:

Το θέμα του σεναρίου αφορά τη μελέτη της συνάρτησης $y=ax+\beta$ και τη χρήση της ως εργαλείο για τη διερεύνηση και επίλυση αντιστοιχων προβλημάτων. Η διαδικασία που προτείνεται στο συγκεκριμένο σενάριο κατά μια έννοια "αντιστρέφει" την παραδοσιακή διαδικασία που ακολουθείται στην συνήθη διδακτική πρακτική για την μελέτη των συναρτήσεων και τη λύση προβλημάτων. Συγκεκριμένα, οι μαθητές/τριες δεν έχουν δεδομένη τη συνάρτηση, ώστε μέσω της μελέτης της να απαντήσουν στα ερωτήματα του προβλήματος. Αντίθετα, μέσω των δραστηριοτήτων του σεναρίου εμπλέκονται σε διαδικασίες προσέγγισης ερευνητικών δεδομένων και μέσω αυτών οδηγούνται στην κατασκευή της συνάρτησης. Αυτή ακριβώς η διαδικασία δεν