

Εκπαίδευση Επιμορφωτών Β' επιπέδου Τ.Π.Ε.

Συστάδα: Μαθηματικών (ΠΕ03)

ΕΠΙΜΟΡΦΩΤΙΚΟ ΥΛΙΚΟ - ΕΙΔΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

Ο ερευνητής και οι χελώνες ΚΑΡΕΤΑ - ΚΑΡΕΤΑ

Σενάριο για την Άλγεβρα

Έκδοση 1η

Νοέμβριος 2018

Πράξη:	ΕΠΙΜΟΡΦΩΣΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ ΓΙΑ ΤΗΝ ΑΞΙΟΠΟΙΗΣΗ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΩΝ ΨΗΦΙΑΚΩΝ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΩΝ ΣΤΗ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΠΡΑΞΗ (ΕΠΙΜΟΡΦΩΣΗ Β' ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΤΠΕ)
Φορείς Υλοποίησης:	Δικαιούχος φορέας:  ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ & ΕΚΔΟΣΕΩΝ Συμπράττων φορέας:  ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΕΡΕΥΝΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

**Επιχειρησιακό Πρόγραμμα
Ανάπτυξη Ανθρώπινου Δυναμικού,
Εκπαίδευση και Διά Βίου Μάθηση**
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ανάπτυξη - εργασία - αλληλεγγύη

Σενάριο 2: Ο ερευνητής και οι χελώνες ΚΑΡΕΤΑ_ΚΑΡΕΤΑ

Συγγραφέας:

Καλλιόπη Αρδαβάνη, Επιμορφώτρια Μαθηματικών (Β' επιπέδου).

Γνωστική περιοχή:

Άλγεβρα

Ανεξάρτητη και εξαρτημένη μεταβλητή.

Πεδίο ορισμού και πεδίο τιμών συνάρτησης.

Μελέτη της γραφικής παράστασης της $y=ax+\beta$.

Αλλαγή κλίμακας της γραφικής παράστασης.

Μετασχηματισμοί της $y=ax$.

Έννοια της αντίστροφης συνάρτησης .

Θέμα:

Το θέμα του σεναρίου αφορά τη μελέτη της συνάρτησης $y=ax+\beta$ και τη χρήση της ως εργαλείο για τη διερεύνηση και επίλυση αντίστοιχων προβλημάτων. Η διαδικασία που προτείνεται στο συγκεκριμένο σενάριο κατά μια έννοια “αντιστρέφει” την παραδοσιακή διαδικασία που ακολουθείται στην συνήθη διδακτική πρακτική για την μελέτη των συναρτήσεων και τη λύση προβλημάτων. Συγκεκριμένα, οι μαθητές/τριες δεν έχουν δεδομένη τη συνάρτηση, ώστε μέσω της μελέτης της να απαντήσουν στα ερωτήματα του προβλήματος. Αντίθετα, μέσω των δραστηριοτήτων του σεναρίου εμπλέκονται σε διαδικασίες προσέγγισης ερευνητικών δεδομένων και μέσω αυτών οδηγούνται στην κατασκευή της συνάρτησης. Αυτή ακριβώς η διαδικασία δεν

είναι εύκολα προσεγγίσιμη με τα παραδοσιακά μέσα διδασκαλίας, ενώ αντίθετα ενθαρρύνεται με τη χρήση του προτεινόμενου λογισμικού.

Τεχνολογικά εργαλεία

Το σενάριο προτείνεται να υλοποιηθεί με το λογισμικό Function Probe¹³.

Σκεπτικό

Βασική ιδέα:

Η ιδέα του σεναρίου προήλθε από μια εφαρμογή του σχολικού βιβλίου Μαθηματικών Γ' Λυκείου. Το πρόβλημα με την δοσολογία φαρμάκου και τον χρόνο επίδρασης αναισθητικού προσφέρεται για τον σχεδιασμό δραστηριοτήτων που αναδεικνύουν τη δυναμική μιας πραγματικής κατάστασης. Οι μαθητές/τριες καλούνται να διαλέξουν και να ορίσουν την ανεξάρτητη μεταβλητή (χρόνος - ποσότητα φαρμάκου), να φτιάξουν πίνακα αντίστοιχων τιμών και να δουν τα αντίστοιχα ζευγάρια ως σημεία στο επίπεδο. Ερευνούν, αναζητούν, πειραματίζονται αν υπάρχει ευθεία ή καμπύλη που διέρχεται από αυτά. Η μαθηματοποίηση του προβλήματος δίνει την ευκαιρία στους μαθητές να εμπλακούν σε διαδικασίες μοντελοποίησης μιας πραγματικής κατάστασης και επίλυσης του προβλήματος.

Προστιθέμενη αξία:

Οι μαθητές/τριες γνωρίζουν την ευθεία ως γεωμετρικό σχήμα και ως γραφική παράσταση των συναρτήσεων $y=x$, $y=ax$, $y=ax+b$ ανεξάρτητων μεταξύ τους και άσχετα από την καθημερινότητα. Δυσκολεύονται να κατασκευάσουν συναρτήσεις για να λύσουν πραγματικά προβλήματα. Δεν κατανοούν τον συσχετισμό δύο μεταβλητών και τη χρησιμότητα της γνώσης αυτής.

Το σενάριο βάζει τους/τις μαθητές/τριες αλλά και τους/τις διδάσκοντες/ουσες σε διερευνητική διαδικασία που δεν μπορεί να γίνει παραδοσιακά. Οι μαθητές/τριες έχουν τη δυνατότητα να κατασκευάσουν και να μελετήσουν μια συνάρτηση προκειμένου να λύσουν ένα πρόβλημα, έχοντας διαθέσιμες πολλαπλές αναπαραστάσεις της ίδιας συνάρτησης όπως του πίνακα τιμών της, του τύπου της και του γραφήματός της.

Πιο συγκεκριμένα: Οι μαθητές/τριες επιλέγουν την ανεξάρτητη μεταβλητή και ορίζουν το πεδίο ορισμού. Αναπροσαρμόζουν την κλίμακα ώστε να βλέπουν στο γράφημα τα σημεία μιας περιοχής. Προσεγγίζουν σημεία μέσω μιας ευθείας πειραματιζόμενοι/ες σαν να κρατούν ένα χάρακα στο χέρι και να τον μετακινούν ώστε να περάσει όσο το δυνατόν πιο κοντά σε αυτά. Το FP¹⁴ τους παρέχει τη δυνατότητα σε κάθε φάση του πειραματισμού τους να βλέπουν τον τύπο της ευθείας. Παράλληλα, δίνεται η δυνατότητα στον διδάσκοντα να αναφερθεί και σε ήδη διδαγμένες έννοιες όπως π.χ. τα ανάλογα και αντιστρόφως ανάλογα ποσά.

Πλαίσιο εφαρμογής

Σε ποιους απευθύνεται:

¹³ Για τις ανάγκες της επιμόρφωσης προτείνεται να υλοποιηθεί με το GeoGebra χρησιμοποιούμενο ως CAS. Μετά την ανάπτυξη του πρωτότυπου σεναρίου, ακολουθεί η εκδοχή της «ανάλυσης του σεναρίου» με το GeoGebra.

¹⁴ ή/και τα προσαρμοσμένα εργαλεία του GeoGebra που του προσδίδουν λειτουργικότητες CAS.

Το σενάριο μπορεί να εφαρμοστεί με κατάλληλες προσαρμογές στις Β' και Γ' Γυμνασίου και στην Α' Λυκείου.

Χρόνος υλοποίησης:

Για την εφαρμογή του σεναρίου εκτιμάται ότι απαιτούνται 2-3 διδακτικές ώρες.

Χώρος υλοποίησης:

Το σενάριο προτείνεται να υλοποιηθεί στο εργαστήριο των Η/Υ. Οι μαθητές/τριες εργάζονται σε ομάδες των δύο ή τριών ατόμων ανά υπολογιστή.

Προαπαιτούμενες γνώσεις:

Οι μαθητές/τριες θα πρέπει να έχουν διδαχθεί τις συναρτήσεις $y=ax$, $y=ax+b$, $y=a/x$ καθώς και τις γραφικές τους παραστάσεις.

Να γνωρίζουν βασικές λειτουργίες του χρησιμοποιούμενου λογισμικού.

Απαιτούμενα βοηθητικά υλικά και εργαλεία:

Για την διεξαγωγή της δραστηριότητας απαιτούνται φύλλο εργασίας για τους/τις μαθητές/τριες και βασικές οδηγίες για την λειτουργία του χρησιμοποιούμενου λογισμικού.

Κοινωνική ενσυχρήσρωση της τάξης:

Οι μαθητές/τριες είναι σε ομάδες των 2 – 3 ατόμων με κοινό φύλλο εργασίας. Συνεργάζονται, συζητούν, πειραματίζονται, ερευνούν και αλληλεπιδρούν μεταξύ τους αλλά και με το λογισμικό. Διατυπώνουν κανόνες. Οι μαθητές/τριες ενθαρρύνονται από τον/την διδάσκοντα/ουσα όταν κάνουν λάθη να πειραματίζονται και να προσπαθούν μέχρι να ικανοποιηθούν από το αποτέλεσμα. Ο/Η διδάσκων/ουσα παρακολουθεί, παροτρύνει, και καθοδηγεί τις ομάδες.

Στόχοι:

Οι δραστηριότητες που περιγράφονται στη συνέχεια έχουν ως στόχο οι μαθητές/τριες:

να αλληλεπιδράσουν με το πρόγραμμα,

να κατανοήσουν τις έννοιες του πεδίου ορισμού και τιμών μιας συνάρτησης και το τι σημαίνουν οι έννοιες αυτές σε ένα πραγματικό πρόβλημα,

να ξεκαθαρίσουν την έννοια των αντιστρόφως ανάλογων ποσών,

να αναγνωρίσουν μια ευθεία του επίπεδου ως μετασχηματισμό της $y=ax$ και να μπορούν να πραγματοποιούν μετασχηματισμούς της για να κάνουν τη γραφική παράσταση μιας άλλης συνάρτησης,

να κατανοήσουν την έννοια της αντίστροφης συνάρτησης.

Ανάλυση του σεναρίου

Ροή εφαρμογής των δραστηριοτήτων:

Η εφαρμογή του σεναρίου στην τάξη υλοποιείται μέσα από τα βήματα του φύλλου εργασίας που δίνεται σε κάθε ομάδα. Σε αυτό έχουν συναφθεί οδηγίες και εικόνες των εργαλείων του λογισμικού για την διαδικασία επίλυσης του προβλήματος. Οι μαθητές/τριες ενημερώνονται για το πρόβλημα συνολικά και κατόπιν απαντούν στα ερωτήματα.

Η εφαρμογή των δραστηριοτήτων μπορεί να διαχωριστεί σε τρεις φάσεις:

1η Φάση

Στην 1^η φάση οι μαθητές/τριες ενημερώνονται για το πρόβλημα, ενεργοποιούνται για να καταχωρήσουν τα δεδομένα σε πίνακα/υπολογιστικό φύλλο και παρατηρούν το είδος της σχέσης τους. Συζητούν και προτείνουν την ανεξάρτητη μεταβλητή της σχέσης αυτής. Στέλνουν τα ζεύγη τιμών που ορίζονται από αυτή τη διαδικασία σαν σημεία στο γράφημα και αλλάζουν την κλίμακα για να τα διακρίνουν.

Πιο συγκεκριμένα, δίνεται στους μαθητές σε φύλλο εργασίας το παρακάτω πρόβλημα:

Το πρόβλημα: Σώστε τις χελώνες ΚΑΡΕΤΑ - ΚΑΡΕΤΑ!. Ένας ερευνητής εξετάζει την επίδραση ενός αναισθητικού σε 10 χελώνες Καρέτα - Καρέτα προκειμένου να το προωθήσει σε χειρουργούς για λεπτές σωτήριες επεμβάσεις σε αυτές. Μελετά τους χρόνους που μεσολάβησαν ώσπου οι χελώνες να χάσουν τις αισθήσεις τους (να λιποθυμήσουν) εμβολιάζοντας τις με διαφορετική δόση κάθε φορά. Παρατηρεί ότι όταν οι δόσεις είναι 0.30, 0.35, 0.40, 0.45, 0.55, 0.60, 0.65, 0.70, 0.75, 0.80 mgr οι αντίστοιχοι χρόνοι λιποθυμίας είναι: 12.5, 11.5, 11, 8.5, 7, 6, 5, 4, 2.5, 2 sec.

Ζητείται από τους μαθητές να συμπληρώσουν τις 2 πρώτες στήλες στο παράθυρο Πίνακας του FP γράφοντας στην πρώτη στήλη τις δόσεις φαρμάκου σε mgr και στη δεύτερη τους αντίστοιχους χρόνους λιποθυμίας σε sec των χελωνών ονομάζοντας την πρώτη m και την δεύτερη t .

Πίνακας				
Αρχείο Επεξεργασία Αποστολή Παράθυρα Πίνακας				
m	t			
δόση(Mgr)	χρόνος			
0.3	12.5			
0.35	11.5			
0.4	11			
0.45	8.5			
0.55	7			
0.6	6			
0.65	5			
0.7	4			
0.75	2.5			
0.8	2			

Εικόνα 70

Καλούνται ακολούθως να παρατηρήσουν τα δεδομένα στον πίνακα και να γράψουν τις παρατηρήσεις τους. Αν παρατηρήσουν ότι (ίσως) τα ποσά είναι αντιστρόφως ανάλογα μπορεί ο διδάσκων να τους παροτρύνει να το ψάξουν με την βοήθεια του FP και σε μια νέα στήλη του πίνακα να ζητήσουν μια σχέση που θα πρέπει να ικανοποιούν αυτά π.χ $z = m \cdot t$.

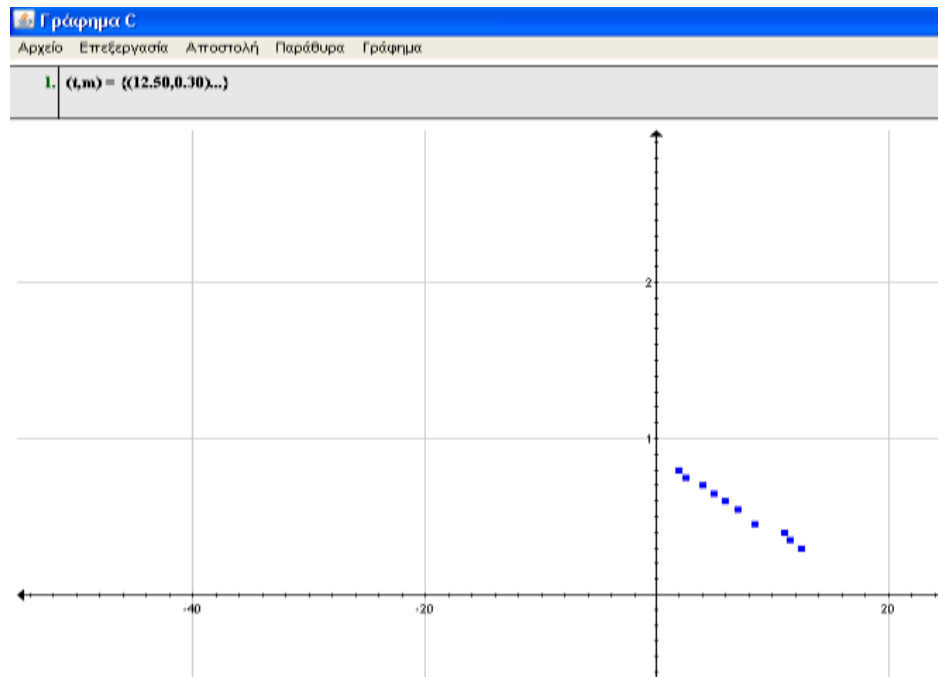
Κατόπιν θα πρέπει να συζητήσουν για το ποιο από τα δύο ποσά εξαρτάται από το άλλο. Αυτό μπορεί να γίνει θέτοντας ο διδάσκων την ερώτηση: Από τι εξαρτάται τι;

Στη συνέχεια καλούνται να βάλουν το  στη στήλη της ανεξάρτητης μεταβλητής και το  στη στήλη της εξαρτημένης.

Πίνακας			
Αρχείο	Επεξεργασία	Αποστολή	Παράθυρα
Πίνακας			
x	y		
m	t		
δραση(Mar)	χρονος		
0.3	12.5		
0.35	11.5		
0.4	11		
0.45	8.5		
0.55	7		
0.6	6		
0.65	5		
0.7	4		
0.75	2.5		
0.8	2		

Εικόνα 71

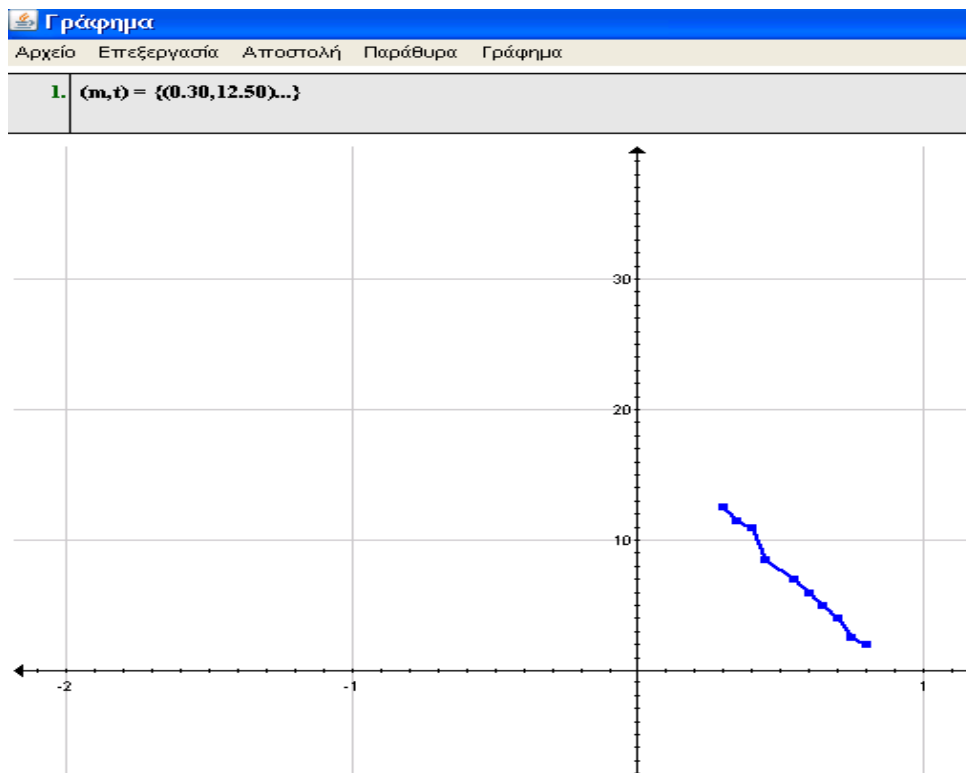
Στη συνέχεια οι μαθητές καλούνται να στείλουν τα αντίστοιχα ζευγάρια τιμών (x , y) στο επίπεδο και να ελέγξουν αν αυτά εμφανίζονται στο παράθυρο Γράφημα. Αν δεν τα διακρίνουν, ο εκαπιδευτικός καλεί τους μαθητές να αναρωτηθούν και να συζητήσουν με την ομάδα τους τη γνώμη τους για το τι συμβαίνει και τι πρέπει να αλλάξει προκειμένου να εμφανιστούν (Αλλαγή κλίμακας).



Εικόνα 72

2^η Φάση

Στη δεύτερη φάση οι μαθητές καλούνται όταν έχουν στο οπτικό τους πεδίο τα σημεία να ζητήσουν από το γράφημα «σύνδεση σημείων» και να συζητήσουν σχετικά με το είδος της γραμμής που τα ενώνει (π.χ. αν τους θυμίζει περισσότερο ευθεία ή καμπύλη).



Εικόνα 73

Αν ο μαθητής θεωρήσουν τη γραμμή ως ευθεία καλούνται να πληκτρολογήσουν στο πλαίσιο συναρτήσεων τον πιο απλό τύπο συνάρτησης που αντιστοιχεί σε μια ευθείας. Οι μαθητές μπορεί να πληκτρολογήσουν την $t=m$, $t=-m$ ή κάτι άλλο. Καλούνται να ζητήσουν: γράφημα → επιλογές γραφήματος → εμφάνιση μετασχηματισμών. Έχοντας ως αφετηρία την ευθεία που πληκτρολόγησαν να προσεγγίσουν τη γραμμή που συνδέει τα σημεία. Να χρησιμοποιήσουν τα



εργαλεία μετατόπισης

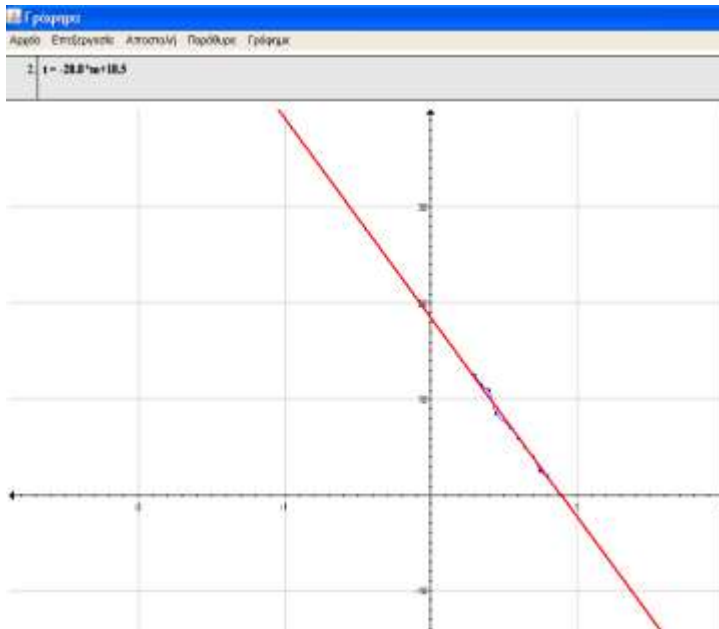
και αυξομείωσης



του FP σε αυτήν την προσπάθεια.

Καλούνται ακολούθως να σημειώσουν τον τύπο της παραπάνω ευθείας. Μια ενδεικτική απάντηση μπορεί να είναι η παρακάτω:

$$t = -20.8m + 18.5$$



Εικόνα 74

Ακολουθώντας, οι μαθητές καλούνται να πληκτρολογήσουν στο παράθυρο Πίνακας τον τύπο της ευθείας. Βάζοντας το εικονίδιο  στην αντίστοιχη στήλη θα ενημερωθούν αυτόματα από το λογισμικό οι αντίστοιχες τιμές της στήλης για την κάθε τιμή δόσης του φαρμάκου.

Με αυτό τον τρόπο δίνεται η ευκαιρία να συζητήσουν οι μαθητές για το τι αντιπροσωπεύει ο πίνακας τιμών μιας συνάρτησης.

Στη συνέχεια ζητείται από τους μαθητές να διατυπώσουν πώς θα βοηθήσουν τον ερευνητή ώστε, χωρίς να πραγματοποιήσει πείραμα, να μπορεί να ξέρει τι θα αναμένει όσον αφορά το χρόνο αναισθησίας των χελωνών μετά από δόση φαρμάκου 0.05, 0.1, 0.15, 0.2, 0.5, 0.73, 0.9 και 1 mgr. Ο διδάσκων μπορεί να παροτρύνει τους μαθητές να χρησιμοποιήσουν περισσότερους τρόπους για τους υπολογισμούς αυτούς όπως π.χ. το εργαλείο 'Γέμισμα πίνακα' ή την κατασκευή κουμπιού  στην αριθμομηχανή.

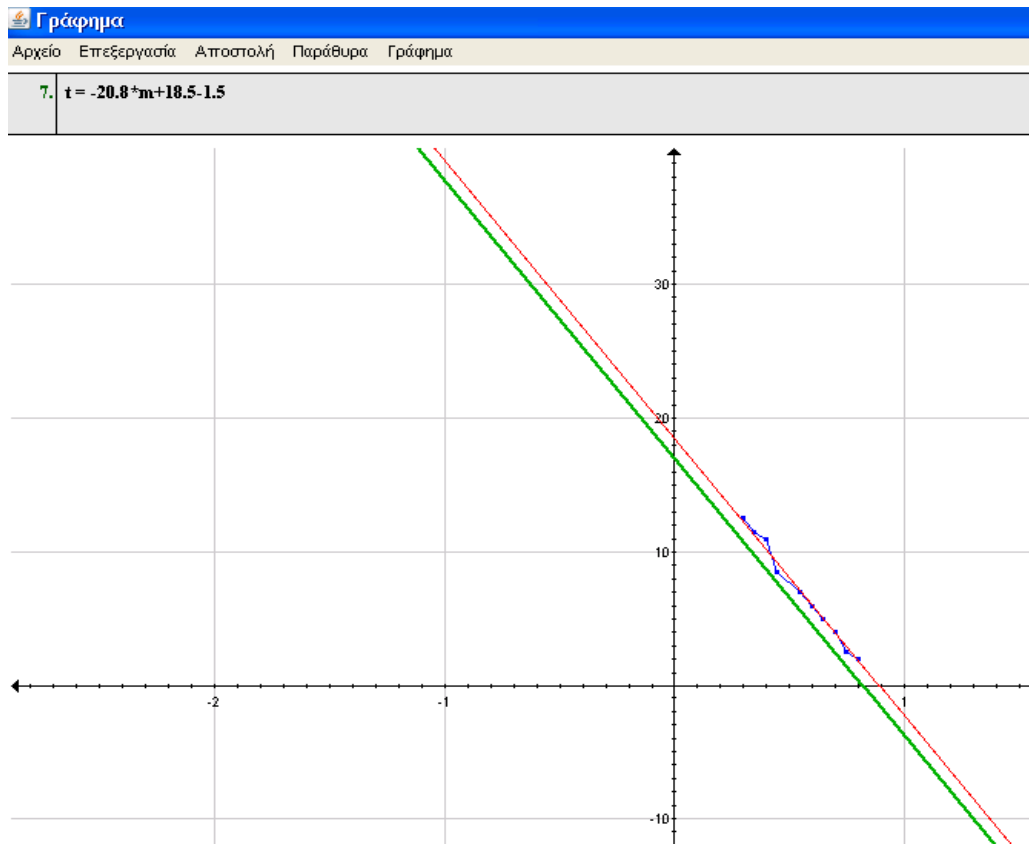
3^η Φάση

Στην 3^η φάση οι μαθητές καλούνται να απαντήσουν στο αν η ευθεία τέμνει τους άξονες και σε ποια σημεία, να ερμηνεύσουν τα ευρήματά τους για το πείραμα και να διατυπώσουν εξηγήσεις.

Να γράψουν ποιο είναι το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών στην παραπάνω συνάρτηση που κατασκεύασαν στο FP.

Εδώ είναι μια καλή ευκαιρία να γίνει αντικείμενο διαπραγματεύσεων το τι σημαίνει για το πείραμα το σημείο τομής του γραφήματος της συνάρτησης με τον άξονα x και να απαντήσουν στο ερώτημα: Με πόση ποσότητα φαρμάκου πρέπει να εφοδιαστεί ο ερευνητής ώστε να εξασφαλίσει τη δυνατότητα 23 τουλάχιστον πειραματισμών ακόμη και πόσο θα του κοστίσει αν το φάρμακο έχει 120.000 ευρώ το κιλό?

Αν ένα νέο φάρμακο βελτιώνει το χρόνο αναισθησίας κατά 1.5 sec να βρουν τον τύπο της αντίστοιχης ευθείας και τα χρήματα που θα ωφεληθεί ο ερευνητής για την αγορά του φαρμάκου.



Εικόνα 75

Τέλος, μπορεί να τεθεί από τον διδάσκοντα σε φύλλο εργασίας το εξής ερώτημα:

Ο ερευνητής θέλει να αναισθητοποιήσει μια χελώνα σε χρόνο $t = 5.3 \text{ sec}$. Πόση θα είναι η απαιτούμενη ποσότητα φάρμακου?

Οι μαθητές καλούνται να βοηθήσουν τον ερευνητή να έχει ένα τύπο υπολογισμού της δόσης όταν για την επέμβαση απαιτείται συγκεκριμένος χρόνος αναισθητοποίησης. Αν αυτό είναι μια νέα συνάρτηση να βρουν το πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών της, να τα συγκρίνουν και να τα αντιπαραβάλλουν με την αρχική. Τέλος, να κάνουν τις παρατηρήσεις τους και να διατυπώσουν κανόνες.

Επέκταση της δραστηριότητας

Επέκταση στη μελέτη άλλων τύπων συναρτήσεων.

Π.χ. της μορφής $y=ax^2$, $y=a(x-p)^2$, $y=ax^2+q$, $y=a(x-p)^2+q$, $y=ax^2+bx+c$,

Εκθετικές συναρτήσεις, $y=e^x$, $y=a e^x$, $y=a e^{bx}$, $y=a e^{bx} +c$

Τριγωνομετρικές συναρτήσεις, $y=p \sin x$, $y=p \sin ax$, $y=p \sin (ax+b)$, $y=p \sin (ax+b) +q$

Εκδοχή Ανάλυσης του σεναρίου με το GeoGebra

Ροή εφαρμογής των δραστηριοτήτων:

Η εφαρμογή του σεναρίου στην τάξη υλοποιείται μέσα από τα βήματα του φύλλου εργασίας που δίνεται σε κάθε ομάδα. Σε αυτό έχουν συναφθεί οδηγίες και εικόνες των εργαλείων του λογισμικού για την διαδικασία επίλυσης του προβλήματος. Οι μαθητές/τριες ενημερώνονται για το πρόβλημα συνολικά και κατόπιν απαντούν στα ερωτήματα.

Η εφαρμογή των δραστηριοτήτων μπορεί να διαχωριστεί σε τρεις φάσεις:

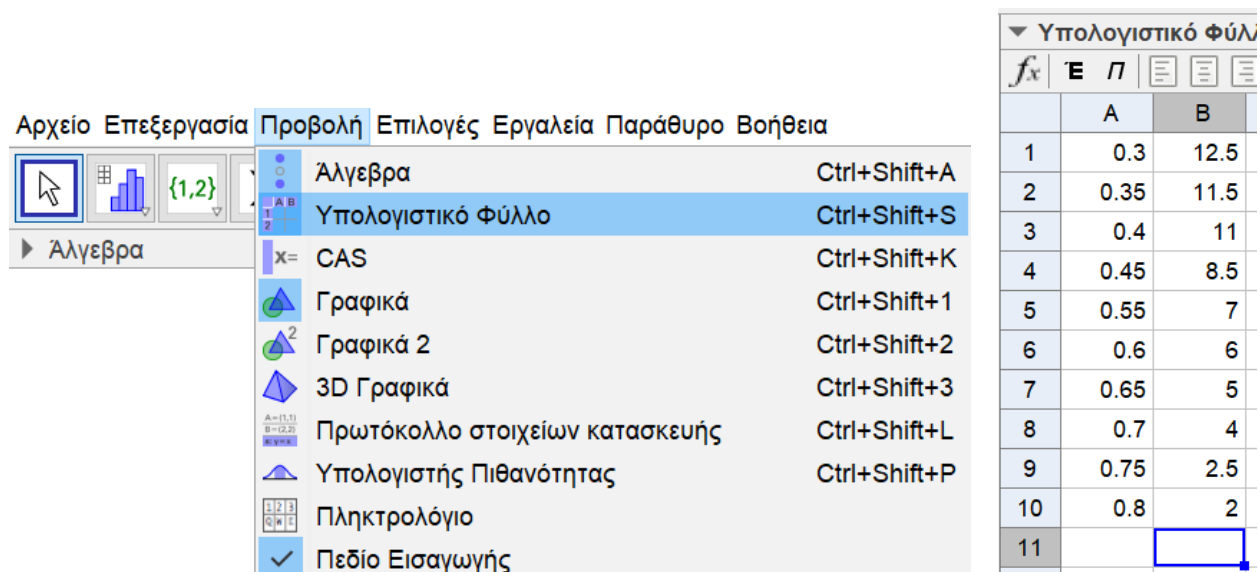
1η Φάση

Στην 1^η φάση οι μαθητές/τριες ενημερώνονται για το πρόβλημα, ενεργοποιούνται για να καταχωρήσουν τα δεδομένα σε πίνακα/υπολογιστικό φύλλο και παρατηρούν το είδος της σχέσης τους. Συζητούν και προτείνουν την ανεξάρτητη μεταβλητή της σχέσης αυτής. Στέλνουν τα ζεύγη τιμών που ορίζονται από αυτή τη διαδικασία σαν σημεία στο γράφημα και αλλάζουν την κλίμακα για να τα διακρίνουν.

Πιο συγκεκριμένα, δίνεται στους μαθητές σε φύλλο εργασίας το παρακάτω πρόβλημα:

Το πρόβλημα: Σώστε τις χελώνες ΚΑΡΕΤΑ - ΚΑΡΕΤΑ!. Ένας ερευνητής εξετάζει την επίδραση ενός αναισθητικού σε 10 χελώνες Καρέτα - Καρέτα προκειμένου να το προωθήσει σε χειρουργούς για λεπτές σωτήριες επεμβάσεις σε αυτές. Μελετά τους χρόνους που μεσολάβησαν ώσπου οι χελώνες να χάσουν τις αισθήσεις τους (να λιποθυμήσουν) εμβολιάζοντας τις με διαφορετική δόση κάθε φορά. Παρατηρεί ότι όταν οι δόσεις είναι 0.30, 0.35, 0.40, 0.45, 0.55, 0.60, 0.65, 0.70, 0.75, 0.80 mgr οι αντίστοιχοι χρόνοι λιποθυμίας είναι: 12.5, 11.5, 11, 8.5, 7, 6, 5, 4, 2.5, 2 sec.

Ζητείται από τους μαθητές να συμπληρώσουν τις 2 πρώτες στήλες στο παράθυρο «Υπολογιστικό Φύλλο» γράφοντας στην πρώτη στήλη τις δόσεις φαρμάκου σε mgr και στη δεύτερη τους αντίστοιχους χρόνους λιποθυμίας σε sec των χελωνών ονομάζοντας την πρώτη m και την δεύτερη t.



The screenshot shows the GeoGebra software interface. On the left, the 'Tools' menu is open, displaying various options like 'Algebra', 'Spreadsheet', 'CAS', 'Graphics', etc. The 'Spreadsheet' option is highlighted. On the right, the 'Spreadsheet' view is active, showing a table with 11 rows and 3 columns. The first column is labeled 'f_x', the second 'E', and the third 'Π'. The data in the table is as follows:

f_x	E	Π
1	0.3	12.5
2	0.35	11.5
3	0.4	11
4	0.45	8.5
5	0.55	7
6	0.6	6
7	0.65	5
8	0.7	4
9	0.75	2.5
10	0.8	2
11		

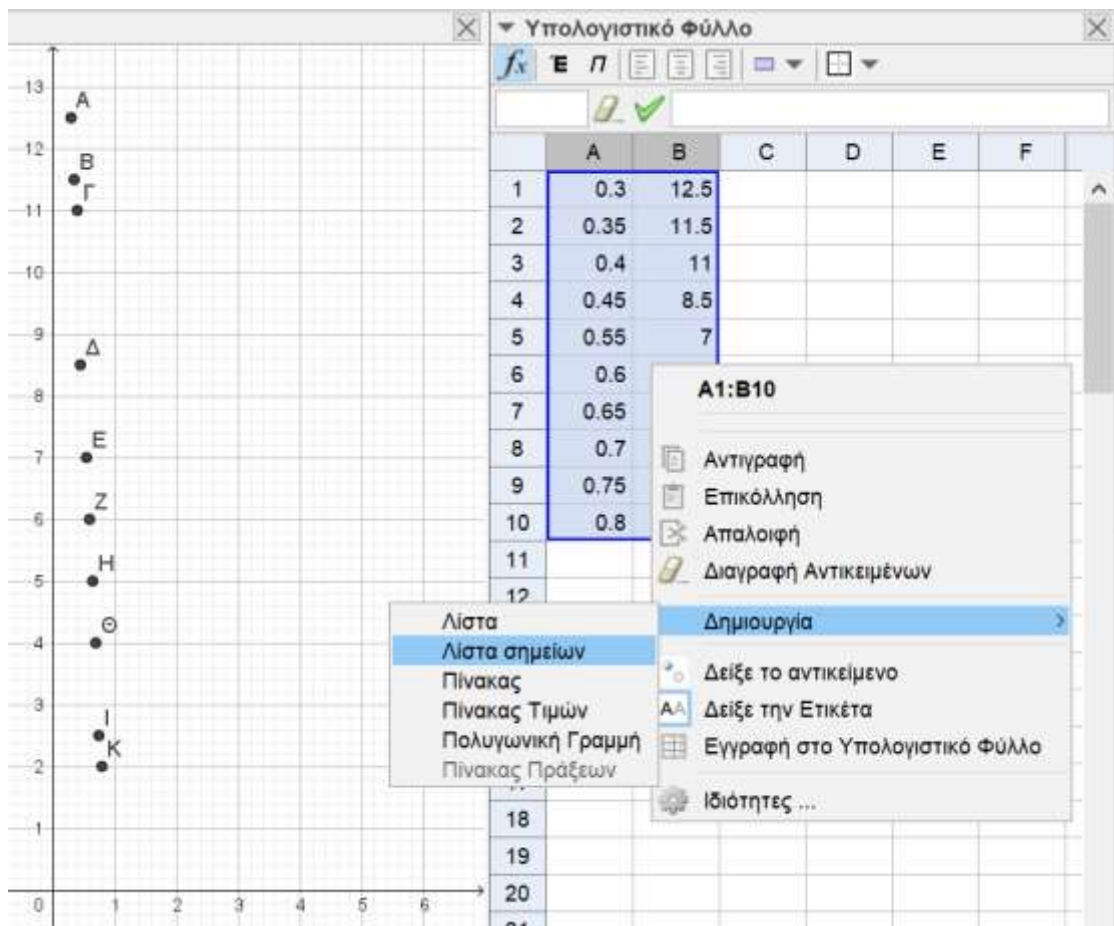
Εικόνα 76

Καλούνται ακολούθως να παρατηρήσουν τα δεδομένα στον πίνακα και να γράψουν τις παρατηρήσεις τους. Αν παρατηρήσουν ότι (ίσως) τα ποσά είναι αντιστρόφως ανάλογα μπορεί ο

διδάσκων να τους παροτρύνει να το ψάξουν με την βοήθεια των δυνατοτήτων του GeoGebra και σε μια νέα στήλη του πίνακα να ζητήσουν μια σχέση που θα πρέπει να ικανοποιούν αυτά π.χ $z=m*t$.

Κατόπιν θα πρέπει να συζητήσουν για το ποιο από τα δύο ποσά εξαρτάται από το άλλο. Αυτό μπορεί να γίνει θέτοντας ο διδάσκων την ερώτηση: Από τι εξαρτάται τι;

Στη συνέχεια οι μαθητές/τριες καλούνται να «στείλουν» τα αντίστοιχα ζευγάρια τιμών στο επίπεδο, επιλέγοντας όλα τα αντίστοιχα κελιά του υπολογιστικού φύλλου και, μετά από δεξί κλικ, επιλέγοντας «Λίστα σημείων» και να ελέγξουν αν αυτά εμφανίζονται στο παράθυρο «Γραφικά» και αν υπάρχει μία καμπύλη ή μία ευθεία πάνω στην οποία βρίσκονται ή που είναι κοντά της. Αν δεν τη διακρίνουν, ο εκπαιδευτικός καλεί τους/τις μαθητές/τριες να αναρωτηθούν και να συζητήσουν με την ομάδα τους τη γνώμη τους για το τι συμβαίνει και τι μπορεί να αλλάξει προκειμένου να βγάλουν συμπέρασμα από την παρατήρηση της θέση των σημείων (π.χ. Αλλαγή κλίμακας με άξονας Χ:άξονας Υ 1:10 αντί για 1:1).



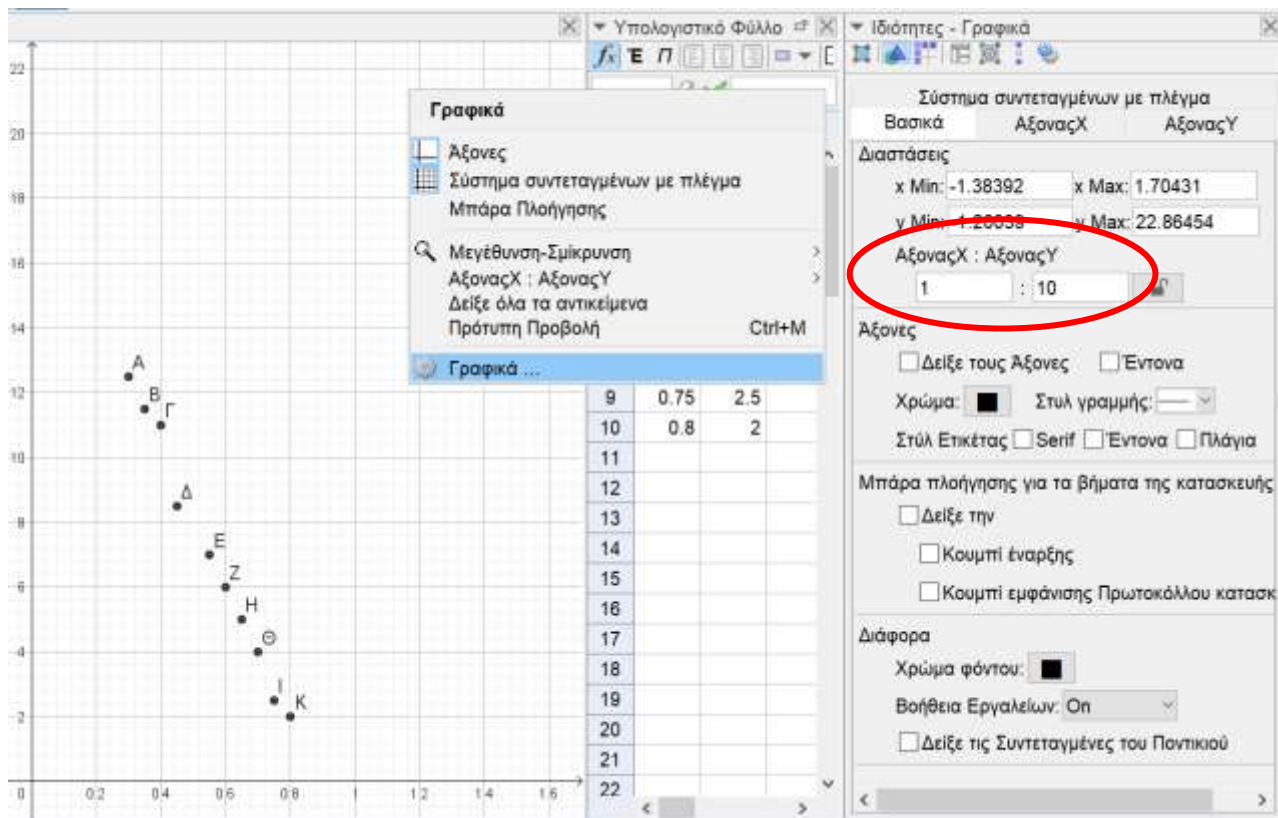
Εικόνα 77

2^η Φάση

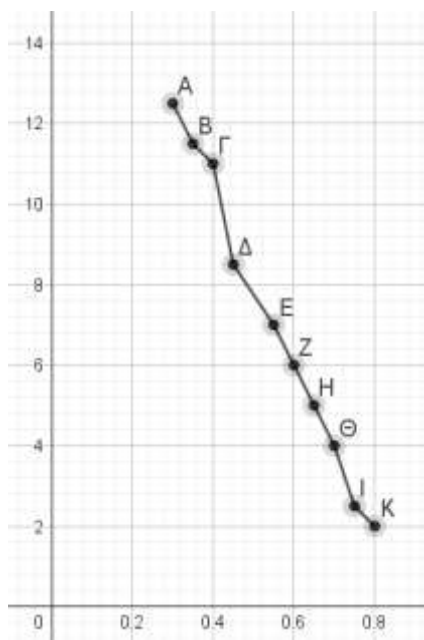
Στη δεύτερη φάση οι μαθητές/τριες καλούνται όταν έχουν στο οπτικό τους πεδίο τα σημεία να προχωρήσουν σε σύνδεση των σημείων στα «Γραφικά». Αυτό γίνεται με πάνω από έναν

τρόπους (π.χ. με το κουμπί  «πολυγωνική γραμμή» και διαδοχική επιλογή όλων των σημείων, ή με επιλογή των κελιών του πίνακα και χρήση της δημιουργίας «πολυγωνικής

γραμμής»). Στη συνέχεια οι μαθητές/τριες συζητήσουν σχετικά με το είδος της γραμμής που ενώνει τα σημεία (π.χ. αν τους θυμίζει περισσότερο ευθεία ή καμπύλη).



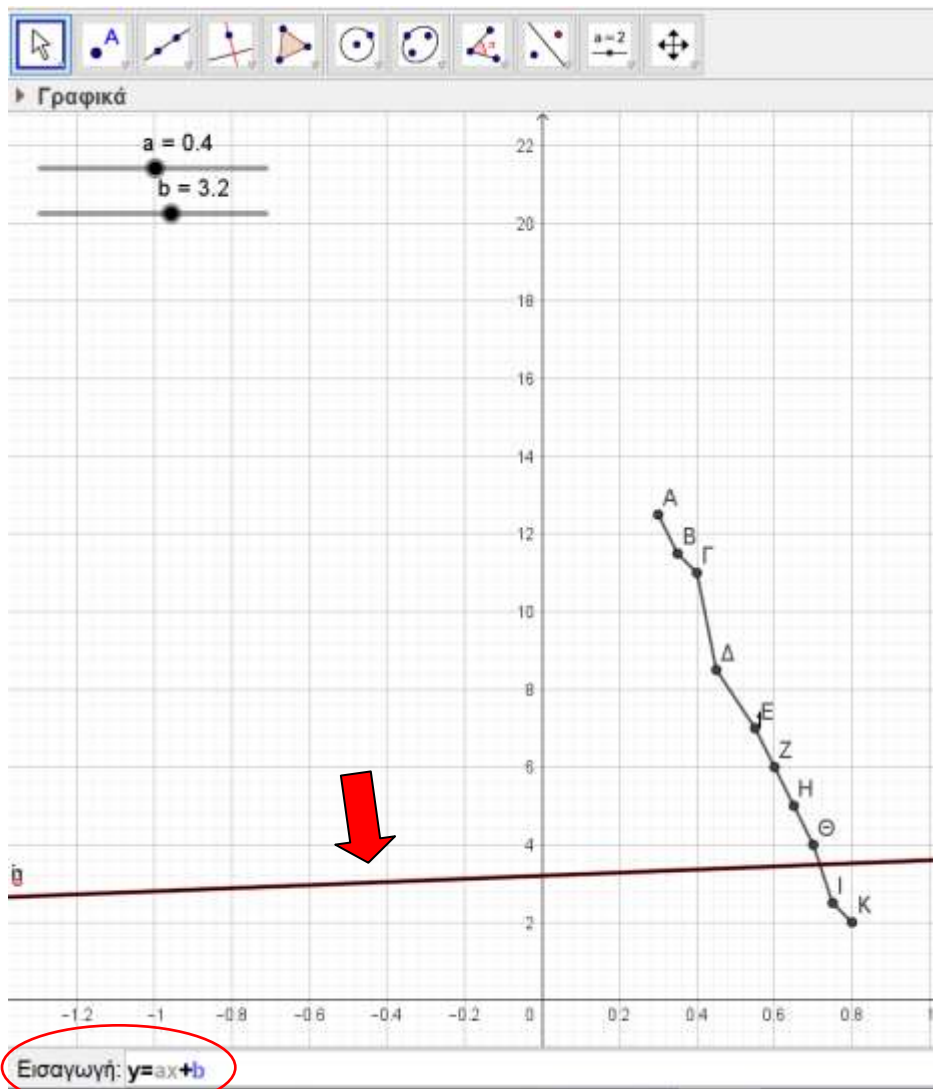
Εικόνα 78



Εικόνα 79

Αν οι μαθητές/τριες θεωρήσουν τη γραμμή ως ευθεία καλούνται να πληκτρολογήσουν στην γραμμή «Εισαγωγής» του GeoGebra τον τύπο συνάρτησης που αντιστοιχεί σε μια ευθεία

$y=ax+b$ (εικόνα 80α). Σε παράθυρο διαλόγου, το GeoGebra ρωτά αν θα χρειστεί να εμφανίσει δρομείς a και b . Μετά από καταφατική απάντηση των μαθητών/τριών εμφανίζεται η ευθεία για τις τιμές $a=1$ και $b=1$.



Εικόνα 80α

Με κατάλληλο χειρισμό των δρομέων a και b οι μαθητές/τριες προσαρμόζουν τη θέση της ευθείας, ώστε να είναι περνάει από τα σημεία, *ικανοποιητικά* κοντά από τα σημεία (Εικόνα 80β). Καλούνται ακολουθώντας να σημειώσουν τον τύπο της παραπάνω ευθείας, καταγράφοντας τις τιμές των δρομέων a και b , για τις οποίες πέτυχαν το ικανοποιητικό αποτέλεσμα. Μια ενδεικτική απάντηση μπορεί να είναι η παρακάτω:

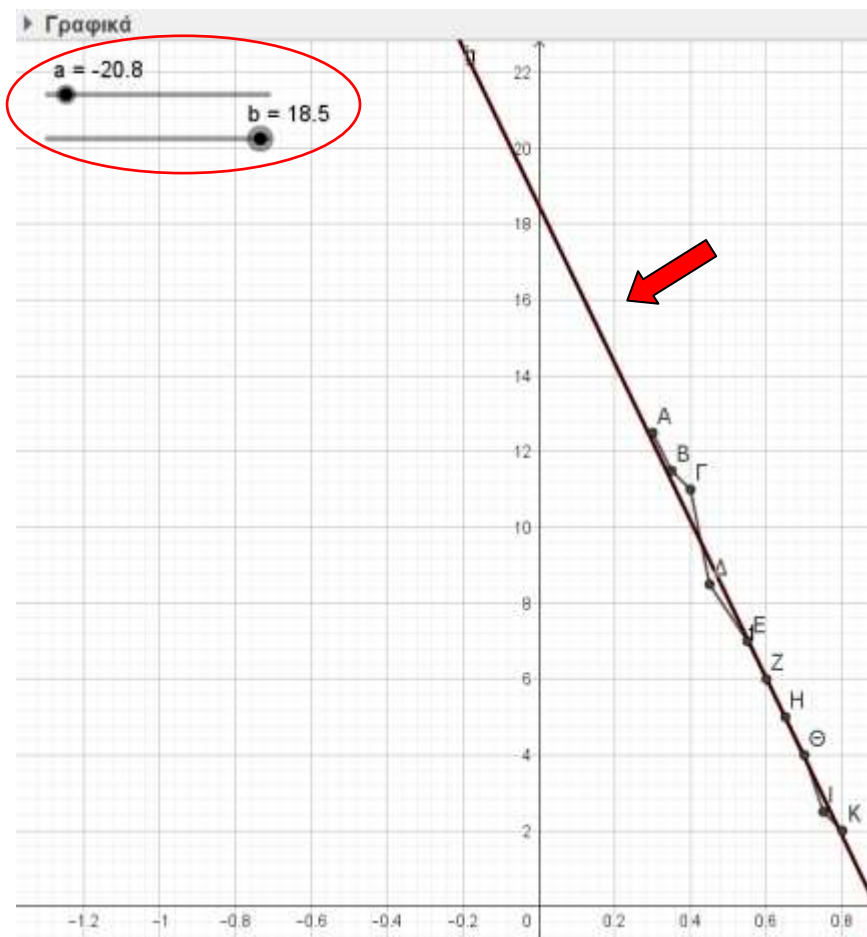
$$y=-20.8x+18.5$$

Ακολουθώντας, οι μαθητές/τριες πληκτρολογούν στο παράθυρο «Υπολογιστικό Φύλλο» τον τύπο της ευθείας, στα κελιά της στήλης C, χρησιμοποιώντας στη θέση του x τις αντίστοιχες τιμές των κελιών της στήλης A. Με αυτόν τον τρόπο στη στήλη C οι μαθητές/τριες βλέπουν στη στήλη C τις τιμές του «χρόνου λιποθυμίας», που προκύπτουν από το μοντέλο της ευθείας (εικόνα 81):

$$y=-20.8x+18.5,$$

για τις αντίστοιχες δόσεις x του φαρμάκου (σε mgr). Στην αμέσως προηγούμενη στήλη (B) βρίσκονται οι πραγματικές τιμές του «χρόνου λιποθυμίας» y και έτσι μπορεί να γίνει σύγκριση

μεταξύ των τιμών των στηλών Β και C. Με αυτό τον τρόπο δίνεται μία ευκαιρία να συζητήσουν οι μαθητές για το τι αντιπροσωπεύει ο πίνακας τιμών μιας συνάρτησης.



Εικόνα 80β

Υπολογιστικό Φύλλο

$C1 = -20.8A1 + 18.5$

	A	B	C
1	0.3	12.5	12.26
2	0.35	11.5	11.22
3	0.4	11	10.18
4	0.45	8.5	9.14
5	0.55	7	7.06
6	0.6	6	6.02
7	0.65	5	4.98
8	0.7	4	3.94
9	0.75	2.5	2.9
10	0.8	2	1.86
11			

Εικόνα 81

Στη συνέχεια ζητείται από τους μαθητές να διατυπώσουν πώς θα βοηθήσουν τον ερευνητή ώστε, χωρίς να πραγματοποιήσει πείραμα, να μπορεί να ξέρει τι θα αναμένει όσον αφορά το χρόνο αναισθησίας των χελωνών μετά από δόση φαρμάκου 0.05, 0.1, 0.15, 0.2, 0.5, 0.73, 0.9 και 1 mgr. Ο/η διδάσκων/ουσα μπορεί να παροτρύνει τους μαθητές να χρησιμοποιήσουν περισσότερους τρόπους για τους υπολογισμούς αυτούς όπως π.χ. τη χρήση της γραφικής παράστασης της ευθείας στα «Γραφικά», το «Υπολογιστικό Φύλλο» και τα επόμενα κελιά της στήλης C κτλ.

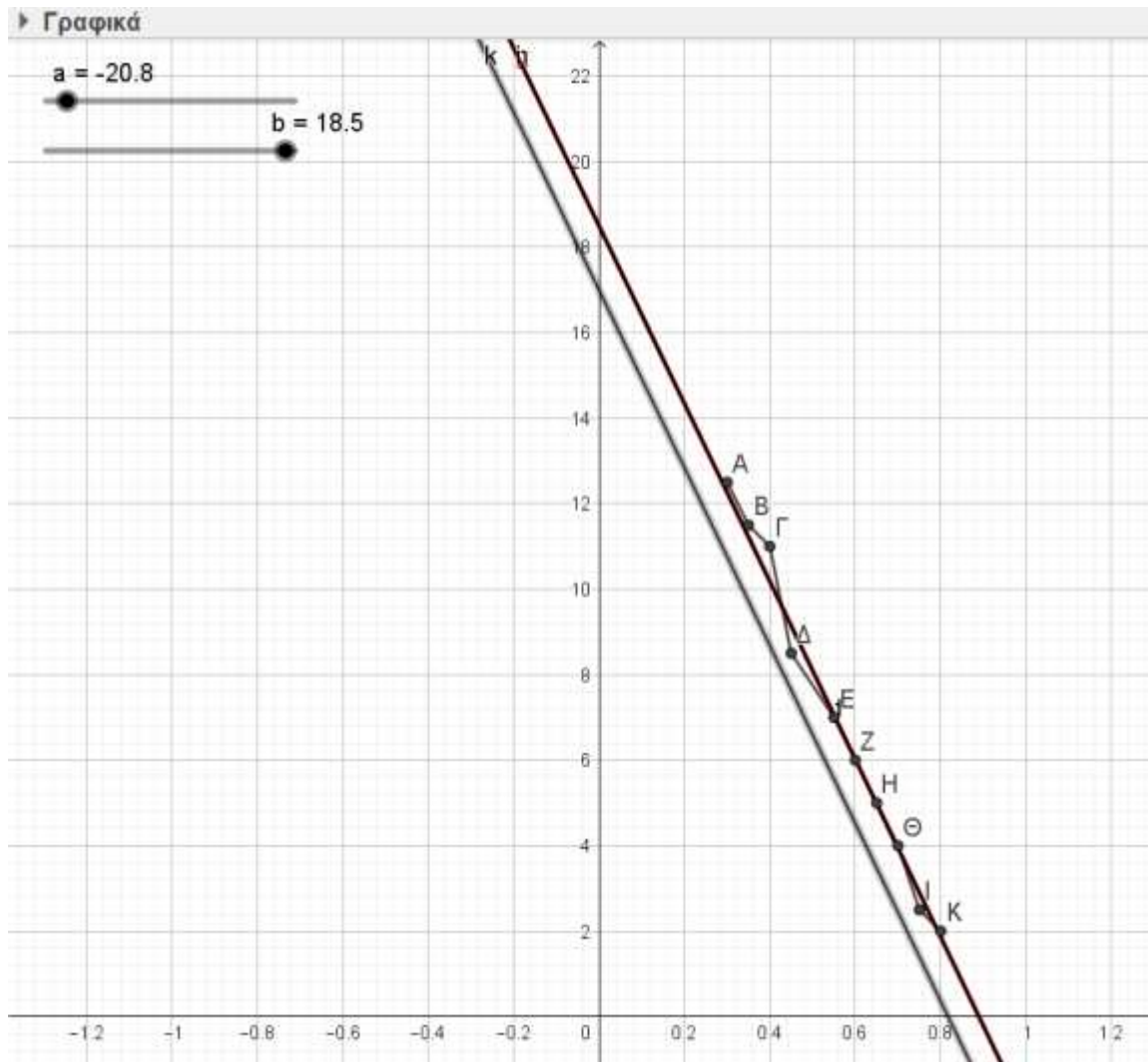
3^η Φάση

Στην 3^η φάση οι μαθητές καλούνται να απαντήσουν στο αν η ευθεία τέμνει τους άξονες και σε ποια σημεία, να ερμηνεύσουν τα ευρήματά τους για το πείραμα και να διατυπώσουν εξηγήσεις.

Να γράψουν ποιο είναι το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της παραπάνω συνάρτησης της που κατασκεύασαν στο GeoGebra, (δηλ. να περιγράψουν αναλυτικότερα το μοντέλο).

Εδώ είναι μια καλή ευκαιρία να γίνει αντικείμενο διαπραγματεύσεων το τι σημαίνει για το πείραμα το σημείο τομής του γραφήματος της συνάρτησης με τον άξονα $x\chi'$ και να απαντήσουν στο ερώτημα: Με πόση ποσότητα φαρμάκου πρέπει να εφοδιαστεί ο ερευνητής ώστε να εξασφαλίσει τη δυνατότητα 23 τουλάχιστον πειραματισμών ακόμη και πόσο θα του κοστίσει αν το φάρμακο έχει 120.000 ευρώ το κιλό?

Αν ένα νέο φάρμακο βελτιώνει το χρόνο αναισθησίας κατά 1.5 sec να βρουν τον τύπο της αντίστοιχης ευθείας και τα χρήματα που θα ωφεληθεί ο ερευνητής για την αγορά του φαρμάκου (εικόνα 82).



Εικόνα 82

Τέλος, μπορεί να τεθεί από τον διδάσκοντα σε φύλλο εργασίας το εξής ερώτημα:

Ο ερευνητής θέλει να αναισθητοποιήσει μια χελώνα σε χρόνο $t = 5.3 \text{ sec}$. Πόση θα είναι η απαιτούμενη ποσότητα φάρμακου?

Οι μαθητές καλούνται να βοηθήσουν τον ερευνητή να έχει ένα τύπο υπολογισμού της δόσης όταν για την επέμβαση απαιτείται συγκεκριμένος χρόνος αναισθητοποίησης. Αν αυτό είναι μια νέα συνάρτηση να βρουν το πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών της, να τα συγκρίνουν και να τα αντιπαραβάλλουν με την αρχική. Τέλος, να κάνουν τις παρατηρήσεις τους και να διατυπώσουν κανόνες.

Επέκταση της δραστηριότητας

Επέκταση στη μελέτη άλλων τύπων συναρτήσεων.

Π.χ. της μορφής $y = ax^2$, $y = a(x-p)^2$, $y = ax^2 + q$, $y = a(x-p)^2 + q$, $y = ax^2 + bx + c$,

Εκθετικές συναρτήσεις, $y = e^x$, $y = a e^x$, $y = a e^{bx}$, $y = a e^{bx} + c$

Τριγωνομετρικές συναρτήσεις, $y=p \sin x$, $y=p \sin ax$ $y=p \sin (ax+b)$, $y=p \sin (ax+b) +q$